
Exercice 1.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouver la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(1-\cos(\frac{x}{n^2}))$.

2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos(\frac{x}{n^2}))$.

2. a. Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}$, $1-\cos t \leq \dfrac{t^2}{2}$.
2. b. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. c. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

Indications.
1. Utiliser la règle de l'équivalent de signe constant. On rappelle que $1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}$.

2. a. Etudier les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction : $t \mapsto \frac{t^2}{2} - (1-\cos t)$.
2. b. Comme f est paire, il suffit de prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit $u_n(x) = 1-\cos(\frac{x}{n^2})$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$. On déduit de 2. a. que la série de fonctions $\sum u_n$ CVN (donc CVU) sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$ (en fait sur tout segment $[0,b] \subset \mathbb{R}^+$) : la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\|u_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge par comparaison de termes positifs car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n\|_{\infty,[a,b]} = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]}|u_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} u_n(x) \leq \frac{b^2}{2n^4}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}$ converge. Et on conclut avec le théorème convergence uniforme et continuité.

2. c. Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \frac{1}{n^2}\sin(\frac{x}{n^2})$. La série de fonctions $\sum u_n'$ CVN (donc CVU) sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (en fait sur $\mathbb{R}$) car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [a,b]$, $|u_n'(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ (donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} \leq \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente). Conclure avec le théorème convergence uniforme et classe $\mathcal{C}^1$ (de "dérivation terme à terme").
On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin(\frac{x}{n^2})$ et en particulier $f'(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sin(0) = \sum_{n=1}^{+\infty}0 = 0$.

Exercice 2 [n° 15-TD 5]. Posons pour tous $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}u_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 2}u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

3. $(*)$ Pour tous $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose : $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)$.

3. a. Justifier que $\forall n \geq 1$, $\forall x > 0$, $|R_n(x)| \leq \dfrac{x}{\ln(n+1)}\dfrac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$.

3. b. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(0) = 1$ et $g(x) = \dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ si $x > 0$.

Vérifier que g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et préciser $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$. En déduire que g est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

4. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Indications. **1.** Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^+$: Si $x > 0$, utiliser la comparaison : $\forall n \geq 2$, $0 \leq u_n(x) \leq \dfrac{x}{\ln 2}(e^{-x})^n$.
Si $x < 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ par croissances comparées. Et si $x = 0$, $\cdots$

2. Etudier les variations de la fonction (positive) u_n sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que u_n est maximale sur $\mathbb{R}^+$ en $x = \frac{1}{n}$:

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = u_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{e}\frac{1}{n\ln n}$$

et on justifie par comparaison série-intégrale que la série de Bertrand $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

3. a. Remarquer tout d'abord que $|R_n(x)| \leq \dfrac{x}{\ln(n+1)}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(e^{-x})^k$.

3. b. Vérifier que g est bien continue à droite en 0. On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

4. En déduire que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 2}u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ et utiliser le théorème CVU et continuité pour conclure.

Exercice 3 [n° 20-TD 5]. 1. a. Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge. On pose : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

1. b. Prouver en utilisant le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions, que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et calculer $S'(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

1. c. En déduire que $\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = -\ln(1-x)$.

Soit $x \in]-1,1[$ (fixé). On pose : $f_x(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos n\theta}{n}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que f_x est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que f_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f_x'(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

4. Déduire de ce qui précède que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ f_x(\theta) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2-2x\cos\theta)$.

5. Déduire de ce qui précède la valeur de $\int_0^{\pi} \ln(1+x^2-2x\cos\theta)d\theta$.

Une solution. La question 1. est une "question de cours". On y établit ce qu'on appelera bientôt le "développement en série entière" (DSE(0)) de $-\ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.

1. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\frac{x^n}{n}| = \frac{|x|^n}{n} \leq |x|^n$ et la série géométrique $\sum_{n\geq 1} |x|^n$ converge car $|x| \in [0,1[$.

D'où la convergence absolue (et donc la convergence) de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ par comparaison (de termes positifs).

1. b. Posons pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]-1,1[$, $u_n(x) = \frac{x^n}{n}$. On constate que :

i) Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$: $\forall x \in]-1,1[$, $u_n'(x) = x^{n-1}$.

ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ d'après 1.

iii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n'$ CVN (donc CVU) sur tout segment $[a,b] \subset]-1,1[$: en effet, u_n' est bornée sur $[a,b]$ avec :

$$\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |u_n'(x)| = \max_{x\in[a,b]} |x|^{n-1} = \max(|a|,|b|)^{n-1}$$

et la série $\sum_{n\geq 1} \|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$, c'est-à-dire la série géométrique $\sum_{n\geq 0} \max(|a|,|b|)^n$, converge car $\max(|a|,|b|) \in [0,1[$.

Le théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions permet alors de conclure que $S \in \mathcal{C}^1(]-1,1[,\mathbb{R})$ avec

$$\forall x \in]-1,1[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

1. c. Comme $]-1,1[$ est un intervalle, d'après 1. b. il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $S(x) = -\ln(1-x) + C$. Or $S(0) = 0$ donc $C = 0$. On obtient finalement le DSE(0) de $-\ln(1-x)$ sur $]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = S(x) = -\ln(1-x).$$

2. Posons, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $v_n(\theta) = \frac{x^n\cos(n\theta)}{n}$.

a) f_x est définie sur $\mathbb{R}$: en effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} v_n(\theta)$ converge absolument par comparaison (donc converge) car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |v_n(\theta)| = \frac{|x|^n|\cos(n\theta)|}{n} \leq \frac{|x|^n|}{n} \leq |x|^n \tag{1}$$

et la série géométrique $\sum_{n\geq 1} |x|^n$ converge car $|x| \in [0,1[$.

b) f_x est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues puisque :

i) chaque fonction v_n est continue sur $\mathbb{R}$ (car cos et $\theta \mapsto n\theta$ sont continues sur $\mathbb{R}$),

ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ CVN (donc CVU) sur $\mathbb{R}$ (et a fortiori sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$) : en effet, d'après (1) chaque fonction v_n (de la variable θ) est bornée sur $\mathbb{R}$ avec : $\|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq |x|^n$, donc la série $\sum_{n\geq 1} \|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ converge par comparaison de termes positifs sachant que la série géométrique $\sum_{n\geq 1} |x|^n$ converge.

3. *i)* Chaque fonction v_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $v_n'(\theta) = -x^n\sin(n\theta)$,

ii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après 2.

iii) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n'$ CVN (donc CVU) sur $\mathbb{R}$ (a fortiori tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$) car v_n' est bornée sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\|v_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |v_n'(\theta)| = |v_n'(\frac{\pi}{2n})| = |x|^n$$

et la série (géométrique) $\sum_{n\geq 1} \|v_n'\|_{\infty,\mathbb{R}}$ converge.

Le théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions permet de conclure que $f_x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f_x'(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n'(\theta) = -\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin(n\theta).$$

Cette dernière somme se calcule classiquement en remarquant que : $x^n \sin(n\theta) = x^n \mathrm{Im}\ (e^{in\theta}) = \mathrm{Im}\ (x^n e^{in\theta}) = \mathrm{Im}\ ((xe^{i\theta})^n)$.
Comme $|xe^{i\theta}| = |x| < 1$, on a donc :

$$f_x'(\theta) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\ ((xe^{i\theta})^n) = -\mathrm{Im}\ (\sum_{n=1}^{+\infty}(xe^{i\theta})^n) = -\mathrm{Im}\ (\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{i\theta})^n - 1) = -\mathrm{Im}\ (\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^{i\theta})^n) = -\mathrm{Im}\ (\frac{1}{1-xe^{i\theta}})$$

Or $\dfrac{1}{1-xe^{i\theta}} = \dfrac{1-xe^{-i\theta}}{(1-xe^{i\theta})(1-xe^{-i\theta})} = \dfrac{1-x(\cos\theta - i\sin\theta)}{1-2x\cos\theta + x^2}$ donc $\mathrm{Im}\ (\dfrac{1}{1-xe^{i\theta}}) = \dfrac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ et finalement :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f_x'(\theta) = -\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

4. Posons pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $g_x(\theta) = \ln(1+x^2-2x\cos\theta)$. La fonction g_x (de la variable θ) est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ g_x'(\theta) = \frac{2x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2} = -2f_x'(\theta)$$

donc il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f_x(\theta) = -\frac{1}{2}g_x(\theta) + K$.
En particulier pour $\theta = 0$, on a : $f_x(0) = -\frac{1}{2}g_x(0) + K$. D'après 1. c.

$$f_x(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

et comme $1-x > 0$, $g_x(0) = \ln(1+x^2-2x) = \ln((1-x)^2) = 2\ln(1-x)$. D'où $-\ln(1-x) = -\ln(1-x) + K$, c'est-à-dire $K = 0$.
Finalement :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ f_x(\theta) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2-2x\cos\theta).$$

5. Posons $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln(1+x^2-2x\cos\theta)\,d\theta = -2\int_0^\pi f_x(\theta)d\theta$. D'après ce qui précède, on a :

$$I = -2\int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(\theta)\,d\theta$$

et d'après 2. la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues (de la variable θ) qui converge uniformément (vers sa somme f_x) sur $\mathbb{R}$ (donc a fortiori sur $[0,\pi]$). Le théorème d'intégration terme à terme (CVU et intégration) permet alors de conclure que :

$$I = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi v_n(\theta)\,d\theta = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{x^n}{n}\cos(n\theta)\,d\theta = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}[\sin(n\theta)]_0^\pi = -2\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$$

car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\pi) = 0$.