Intégrales de Wallis. Formule de Stirling.

I. Intégrales de Wallis. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.

2. Prouver que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

3. *Une relation de récurrence.*

Prouver, à l'aide d'une intégration par parties, que $\forall n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$. $\quad (*)$

4. En déduire que $\forall n \geq 1$, $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

5. a. En observant que $\forall n \geq 2$, $0 < I_n < I_{n-1} < I_{n-2}$ (cf. **1.** et **2.**) et en utilisant $(*)$, prouver que

$$I_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n.$$

5. b. *Equivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.* Déduire de **5. a.** et de **4.** que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Remarque. D'après **5. b.** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

6. *Calcul de I_n.*

6. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

6. b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

7. *Autre expression de I_n.* Vérifier en effectuant un changement de variables que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.

II. Formule de Stirling. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n! \, n^{-n-\frac{1}{2}} \, e^n$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer que $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$.

2. Déduire de **II. 1.** l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}\,(\dfrac{n}{e})^n$.

3. a. Déduire de **I. 6. a.** et de la question précédente un équivalent de I_{2n} quand n tend vers $+\infty$.

3. b. En utilisant l'équivalent de I_{2n} fourni par **I. 5. b.**, montrer que $C = \sqrt{2\pi}$.

On vient donc de prouver que :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n}$$

Solutions et/ou indications.

I. Intégrales de Wallis.

1. Rappelons le "lemme d'annulation" pour l'intégrale d'une fonction *continue et positive* sur un segment :

$\triangleright$ Soit $g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^+)$ telle que $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$. Alors $\forall x \in [a,b], g(x) = 0$.

Sachant que l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ $(a < b)$ est positive, on en déduit que si g est une fonction continue, positive sur $[a,b]$, et *différente de la fonction nulle sur* $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ est *strictement* positive. Ainsi I_n est strictement positive comme intégrale de 0 à $\frac{\pi}{2}$ d'une fonction continue, positive, et *non identiquement nulle sur* $[0,\frac{\pi}{2}]$(car par exemple $\sin^n(\frac{\pi}{2}) = 1 \neq 0$).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n(1-\sin t)\,dt > 0$ car $t \mapsto (\sin t)^n(1-\sin t)$ est continue, positive sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et non identiquement nulle $[0,\frac{\pi}{2}]$.

3. *Relation de récurrence.* Soit $n \geq 2$. Intégrons par parties I_n :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t.\,\sin t\,dt = \underbrace{[\sin^{n-1} t.\,(-\cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0\ car\ \cos(\frac{\pi}{2})=\sin(0)=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2}(t).\cos t.(-\cos t)\,dt \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t).\cos^2 t\,dt = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t).(1-\sin^2 t)\,dt \\ &= (n-1)(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt) = (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

Donc $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ ou encore : $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2} \qquad (*)$.

4. D'après 3. $(*)$ pour tout $n \geq 2$, $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$. Autrement dit la suite $(nI_nI_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite *constante* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nI_nI_{n-1} = 1 \cdot I_1 \cdot I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

5. a. Soit $n \geq 2$. On a donc : $1 < \dfrac{I_{n-1}}{I_n} < \dfrac{I_{n-2}}{I_n} = \dfrac{n}{n-1}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n-1}}{I_n} = 1$ par le théorème de la limite par encadrement.
En d'autres termes, $I_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.

5. b. D'après 5. a. et 4. on a : $nI_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} nI_nI_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $I_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2n}$ ou encore, par positivité de I_n :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Remarque : On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = 0$. Cette limite s'obtient aussi en utilisant le théorème de convergence dominée.

6. *Calcul de I_n.*

6. a. Comme $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$, on obtient successivement avec $(*)$:

$$I_2 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\ I_4 = \frac{3}{4}I_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\ I_6 = \frac{5}{6}I_4 = \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

et plus généralement, $I_{2n} = \dfrac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\cdot\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1.3\ldots(2n-1)\cdot 2.4\ldots(2n)}{(2.4\ldots(2n))^2}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ car

$$2.4\ldots(2n) = (2.1).(2.2)\ldots(2.n) = 2^n \cdot n!.$$

6. b. De même, comme $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, on obtient successivement avec $(*)$:

$$I_3 = \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3},\ I_5 = \frac{4}{5}I_3 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3},\ I_7 = \frac{6}{7}I_5 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

et plus généralement, $I_{2n+1} = \dfrac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)} = \dfrac{2^n\,n!}{3.5\ldots(2n+1)} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

7. Effectuer le changement de variable : $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ dans I_n. On rappelle que $\sin(\dfrac{\pi}{2} - t) = \cos(t)$.