
Exercice 1. `[Trigonométrie,` $\mathbb{C}$`]`. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{8} \cos^2(\frac{k\pi}{9})$.

Exercice 2. `[Equation différentielle]`.

1. Déterminer une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$:

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = f(x)$$

dans les trois cas suivants : $f(x) = e^{-x}$, $f(x) = e^x$ et $f(x) = x + 1$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \mathrm{ch}x + x + 1$.

Exercice 3. `[Analyse réelle]`. *Les questions suivantes sont indépendantes.*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{2f(x) - f(x+h) - f(x-h)}{h^2}$.

2. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Comparer $(\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx)^2$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, dx$.

Exercice 4. `[Intégration]`. *Inégalité de Gronwall.*

Soient $c \in \mathbb{R}^+$, et u et v deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ u(x) \leq c + \int_0^x u(t)v(t)\, dt.$$

1. Soit $f(x) = c + \displaystyle\int_0^x u(t)v(t)\, dt$, $x \in \mathbb{R}^+$.

1. a. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) \leq v(x)f(x)$.

1. b. En déduire que $g : x \mapsto f(x)\exp(-\displaystyle\int_0^x v(t)\, dt)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

2. Prouver finalement que : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $u(x) \leq c\exp(\displaystyle\int_0^x v(t)\, dt)$.

Exercice 5. `[Polynômes]`. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le polynôme $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ admet n racines complexes distinctes.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire, de degré $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}\ z|^d$.

Exercice 6. `[Intégration]`.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

1. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que $f(x)^2 \leq x\displaystyle\int_0^x f'(t)^2\, dt$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\, dx \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)^2\, dx$.

Exercice 7. `[Equations différentielles]`.

1. Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'(x) - xy(x) = 1$ d'inconnue $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$, dérivable.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y''(x) + y'(x) + y(x) = e^{-x}$ d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deux fois dérivable.

Exercice 8. `[Suite]`.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$. Montrer que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 9. `[Suites]`.

Donner des contre-exemples prouvant que les assertions suivantes portant sur des suites réelles sont ... **toutes fausses** :

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 1$.

2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{2n}) = 0$.

3. Si $\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ alors la suite (u_n) converge.

4. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors la suite $(u_{2n} - u_n)$ n'est pas majorée.

5. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

6. Si $\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

7. Si $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$ alors la suite (u_n) converge.

8. Si $\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

9. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et positive alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

10. Si (u_n) est une suite bornée telle que $\lim_{n\to+\infty} \sin(u_n) = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ où ℓ est un multiple entier de π.

11. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $u_{n+1} \geq u_n$.

12. Si (u_n) est une suite décroissante de réels strictement positifs alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

13. Une suite strictement positive convergeant vers 0 décroît à partir d'un certain rang.

14. Si (u_n) est une suite croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n) = 0$ alors la suite (u_n) converge.

Exercice 10. `[Complexes]`.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note U_p l'ensemble des racines p-ièmes complexes de 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n = \sum_{z\in U_p} z^n$.

Exercice 11. `[Polynômes]`.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$.
1. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$.
2. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$ à l'aide de $P(a)$ et $P'(a)$.

Exercice 12. `[Intégration sur un segment et équation fonctionnelle]`.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(\dfrac{x+y}{2}) = \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$ $(*)$.

1. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. En intégrant l'égalité $(*)$ par rapport à y entre 0 et 1, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 4(F(\frac{x+1}{2}) - F(\frac{x}{2})) - \int_0^1 f(y)\,dy.$$

2. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, en utilisant $(*)$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(\dfrac{x}{2})$.

3. Prouver finalement que f est une fonction affine.

Exercice 13. `[Complexes]`.

Soient u, v et w trois complexes de module 1. Montrer que $|u + v + w| = |uv + vw + wu|$.

Indication : Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. On a : $z = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

Exercice 14. `[Suite et série]`.

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. a. Montrer que l'équation : $x^n - nx + 1 = 0$ admet dans $[0, 1]$ une seule solution notée x_n.

1. b. Préciser $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 2} x_n$? Déterminer un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 15. `[Recherche d'équivalent]`.

Montrer que $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} C\sqrt{n}$ où C est une constante à déterminer, de deux façons :

a) en encadrant S_n avec deux intégrales, **b)** en faisant intervenir une somme de Riemann

---

Exercice 16. `[Polynômes, sommes de Riemann].`

1. Soit $n \geq 2$. Ecrire $X^{2n} - 1$ comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ puis comme produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $r > 1$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - 2r\cos(\frac{k\pi}{n}) + r^2)$ à l'aide de 1.

3. Soit $r > 1$. Soit $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\, dx$. Calculer I à l'aide de 2.

Exercice 17. `[Polynômes].`

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n supérieur ou égal à 2, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$. Prouver que P' est scindé à racines simples.

Exercice 18. `[Equations différentielles].`

Résoudre sur $]0, +\infty[$: $x^2y'' - xy' - 4y = 4x^2$. *Indication : on pourra poser* $z(t) = y(e^t)$.

Exercice 19. `[Théorème de Rolle].`

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R})$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

On fixe $x \in]a, b[$. On pose $g_x(t) = f(t) - \dfrac{A}{2}(t-a)(t-b)$ où A (dépendant de x) est tel que $g_x(x) = 0$.

1. Préciser la valeur de A. Prouver, à l'aide du théorème de Rolle, l'existence d'un réel c (dépendant de x) tel que $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)$.

2. Soit $M = \displaystyle\max_{t\in[a,b]} |f''(t)|$. Vérifier que $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M\,\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$. En déduire que $|f'(a)| \leq M\,\dfrac{b-a}{2}$ et $|f'(b)| \leq M\,\dfrac{b-a}{2}$.

Exercice 20. `[Complexes].`

1. Soit $(u, v, w) \in \mathbb{C}^3$. Prouver que $2|u| \leq |u+v| + |v+w| + |w+u|$.

2. Soit $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$. Prouver que $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leq \sum_{1\leq i<j\leq 4} |z_i + z_j|$.

Exercice 21. `[Complexes].`

1. Soit $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$. Simplifier $1 + a + a^2 + a^3 + a^4$.
2. En déduire la valeur de $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$.
3. Calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 22. `[Equation différentielle].`

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + y' - 2y = \cos x$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 23. `[Moyennes arithmétique et géométrique].`

Soit $x_1, \cdots, x_n$ des réels strictement positifs. On pose : $m = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ et $G = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $\ln x \leq \ln m + \frac{1}{m}(x - m)$.

2. En déduire $G \leq m$. *Indication : considérer 1. avec* $x = x_k$, $k \in [\![1, n]\!]$, *et sommer.*

Exercice 24. `[Intégration].`

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Prouver que $\displaystyle(\int_0^1 f'(x)^2\, dx)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\, dx \cdot \int_0^1 f''(x)^2\, dx$.

Exercice 25. `[Limite].`

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{3n} \frac{1}{k}$.

Exercice 26. `[Une inégalité de convexité].`

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) \geq 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq f(a) + f'(a)(t - a)$. Interpréter graphiquement cette inégalité.

Exercice 27. `[Complexes]`.

1. Soit $a = e^{\frac{i\pi}{11}}$. Simplifier $S = a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9$.

2. En déduire la valeur de $T = \cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$

Exercice 28. `[Dérivation]`.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons : $Q_n(x) = (x^2-1)^n$ et $P_n(x) = Q_n^{(n)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. En remarquant que $Q_{n+1}(x) = (x^2-1)Q_n(x)$, exprimer $Q_{n+1}^{(n+2)}(x)$ en fonction de $P_n(x)$, $P_n'(x)$ et $P_n''(x)$.

2. Exprimer $Q_{n+1}'(x)$ en fonction de $Q_n(x)$ et en déduire une autre expression de $Q_{n+1}^{(n+2)}(x)$.

3. Déterminer une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par P_n.

Exercice 29. `[Intégration. Equation différentielle]`.

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,dt + x^2\ (*)$$

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

1. a. Calculer $f(0)$.

1. b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$. *Indication :* $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = \cdots$

Préciser la valeur de $f'(0)$.

1. c. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E) : y'' - y = 2$.

2. Résoudre l'équation (E). Déterminer l'unique solution de (E) telle que : $y(0) = y'(0) = 0$.

3. Déterminer toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(*)$.

Exercice 30. `[Trigonométrie]`. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Montrer que $\arctan(\frac{\sin x}{1-\cos x}) = \frac{\pi - x}{2}$.

Exercice 31. `[Analyse réelle]`. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$.

1. a. Vérifier que f est continue en 0.

1. b. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x > 0$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$.

Indication : récurrence. Exprimer P_{n+1} à l'aide de P_n et P_n'.

Préciser P_1, P_2, P_3.

3. En déduire que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Préciser $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. `[Intégrales]`.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x \sin^2 t\,dt$.

2. *Plus compliqué.* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x |\sin t|\,dt$.

Exercice 33. `[Suites]`. *Les deux questions sont indépendantes.*

1. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} k!$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_{n-2}}{n!}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{s_n}{n!}$.

2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} e^{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n^2}$.

Exercice 34. `[Suites]`. Déterminer les applications f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f \circ f(x) = 6x - f(x)$.

Indication. Soit f une telle application. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Considérer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n).$$

Exercice 35. `[Calcul matriciel]`. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36. `[Algèbre linéaire]`. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme nilpotent d'indice 2.
1. Justifier que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Déterminer $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 37. `[Variables aléatoires]`. **1.** Soient $x \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1} = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}$.

2. Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{1+X}$.

Exercice 38. `[Algèbre linéaire]`. Soit E un espace vectoriel. Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Prouver que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 39. `[Algèbre linéaire]`. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$ et $G = \operatorname{Vect}((1,1,1))$.
Justifier que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection vectorielle p sur F, de direction G.