Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 6.

Exercice 1. `[Autre définition du rayon de convergence de la série entière` $\sum a_n z^n$`]`
1. Vérifier que l'ensemble $J(a)$ des réels $r \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^n = 0$ est un intervalle contenant 0.
2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est la borne supérieure de l'intervalle $J(a)$.

Exercice 2. Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $\sum a_n$ converge et $\sum |a_n|$ diverge.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 3. Soit (a_n) une suite de réels positifs, décroissante, de limite nulle, telle que $\sum a_n$ diverge.
Montrer que le rayon de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1.

Exercice 4. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$.
1. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^n a_n z^n$?
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{3n}$?

Exercice 5. Soit (a_n) une suite de réels ou de complexes. On note R_0 (resp. R_1) le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_{2n} z^n$ (resp. $\sum\limits_{n\geq 0} a_{2n+1} z^n$). Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.

Exercice 6. Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivants : $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a^n}{n + b^n} z^n$, $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a^{n^2}}{(2n)!} z^n$.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R}$. Rayon de convergence R et somme, pour $x \in] - R, R[$, de $\sum\limits_{n\geq 0} \mathrm{ch}(na) x^n$.

Exercice 8. Soit $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \sin(n\theta) x^n$, $x \in \mathbb{R}$.
1. Justifier que son rayon de convergence R est au moins égal à 1.
2. Montrer en raisonnant par l'absurde que la suite $(\sin(n\theta))$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Indication : considérer $\sin((n + 1)\theta)$. En déduire $R = 1$.
3. Soit $x \in] - 1, 1[$. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n$ en remarquant que $\sin(n\theta) x^n = \mathrm{Im}\ ((xe^{i\theta})^n)$.

Exercice 9. Soit a_n le nombre de diviseurs entiers de n, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 10. Déterminer le rayon de convergence des série entières :
1. $\sum \dfrac{z^n}{2 - \sin n}$, **2.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{-n}}{n} z^n$, **3.** $\sum z^{n^2}$, **4.** $\sum \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$, **5.** $\sum \dbinom{2n+1}{n} z^{2n+1}$, **6.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\ln n}{n^2} z^{2n}$, **7.** $\sum e^{\sin n} z^n$, **8.** $\sum \dfrac{n^n}{3^{n^2}} z^n$, **9.** $\sum \sqrt{n}\, 2^n z^n$, **10.** $\sum\limits_{n\geq 1} (1 + \dfrac{1}{n})^{n^2} z^n$, **11.** $\sum \dfrac{2 + \sin n}{n^3} z^n$, **12.** $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{z^n}{n \ln n}$, **13.** $\sum\limits_{n\geq 1} n^{-\lfloor n \rfloor}$, **14.** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{(1 + \sqrt{n})^n}$. **15.** $\sum\limits_{n\geq 0} \tan(\pi\sqrt{n^2 + 1}) z^n$.

Exercice 11. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ une série convergente. Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} x^n$ est $+\infty$.

Exercice 12. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Prouver que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. *Indication : soient* $z \in \mathbb{C}$ *et* $r \in]0, R[$. *Utiliser l'égalité* $\frac{a_n}{n!} z^n = \frac{a_n}{n!} r^n (\frac{z}{r})^n$.

Exercice 13. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Prouver que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2 z^n$ a pour rayon de convergence R^2.

Exercice 14. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ lorsque :
1. $a_n = \dfrac{n^2}{3^n + n}$, **2.** $a_n = (-1)^n \lfloor e^n \rfloor$, **3.** $a_n = \mathrm{Arccos}(1 - \dfrac{1}{n})$, **4.** $a_n = e^{\sqrt{n+1}} - e^{\sqrt{n}}$, **5.** $a_n = \tan(n\dfrac{\pi}{7})$, **6.** $a_n = (\sqrt{n})^n$, **7.** $a_n = e^{-shn}$, **8.** $a_n = a^{\sqrt{n}}$ $(a > 0)$, **9.** $a_n = \arctan(n)$, **10.** $a_n = e^{-n^2}$, **11.** $a_n = n \ln(n)$, **12.** $a_n = (\dfrac{n}{n^2 + 1})^{n^2}$, **13.** $a_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. 14. $a_n = \dfrac{\ln(n^2 + 1)}{\ln(n^3 + 1)}$.

Exercice 15. Rayon de convergence R et somme pour $x \in] - R, R[$ de la série entière $\sum a_n x^n$ avec :
1. $a_n = n$ si n est pair et $a_n = \dfrac{1}{n}$ si n est impair, **2.** $a_n = \dfrac{2^n}{n}$ si n (non nul) est pair et $a_n = n2^n$ si n est impair, **3.** $a_n = 1$ si $n = 3p$, $a_n = 2^p$ si $n = 3p + 1$, $a_n = 3^p$ si $n = 3p + 2$, avec $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. Rayon de convergence R et somme pour $x \in] - R, R[$ de $\sum\limits_{n\geq 1} (1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}) x^n$.

Exercice 17. Rayon de convergence R et somme pour $x \in] - R, R[$ de :
a) $\sum\limits_{n\geq 0} (2 + (-1)^n) x^n$, b) $\sum\limits_{n\geq 0} n x^n$, c) $\sum\limits_{n\geq 0} n^2 x^n$, d) $\sum\limits_{n\geq 0} n^3 x^n$, e) $\sum\limits_{n\geq 0} (2^n + 3^n) x^n$, f) $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n (n^2 + 1) x^{2n}$.

Exercice 18. 1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{2^k}}$. 2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} 3^{\frac{2^k}{k!}}$.

Exercice 19. Rayon de convergence R et somme pour $x \in] - R, R[$ des séries entières :
1. $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{2n + 1}$, **2.** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^{4n}}{4n + 1}$, **3.** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{x^n}{(2n)!}$, **4.** $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{x^{2n}}{n^2 - 1}$, **5.** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n}{(2n + 1)!} x^n$, **6.** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^2}{n!} x^n$, **7.** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^3}{n!} x^n$, **8.** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^3 + n + 3}{n + 1} x^n$, **9.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{1 + \ldots + n}$, **10.** $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n}{(n + 2)!} x^n$, **11.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n^2 + 3n - 1}{n + 3} \cdot \dfrac{x^n}{n!}$, **12.** $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{4n + 1}{2n^2 + n - 1} x^n$, **13.** $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{x^n}{n^3 - n}$,**14.** $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{n + (-1)^{n+1}}{n + (-1)^n} x^n$.

Exercice 20. Quel est le domaine de définition D de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n$? f est-elle continue sur D ?

Exercice 21.

1. Calculer le rayon de convergence R et la somme, pour $x \in]-R, R[$, de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n(2n+1)}$.

2. Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ et de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.

Exercice 22. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. Soit R_1 le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} s_n x^n$ avec $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Montrer que $\min(1, R) \leq R_1 \leq R$.

2. On suppose $R = 1$. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 23. Préciser le DSE(0) des fonctions suivantes :
1. $f(x) = \sin^3 x$, **2.** $f(x) = \frac{1}{(1-ax)(1-bx)}$ avec $0 < a < b$, **3.** $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$, **4.** $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$, **5.** $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x\cos\theta + 1}$, $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, **6.** $f(x) = \mathrm{ch}x \cos x$, **7.** $f(x) = e^{-x}\sin x$, **8.** $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 12)$, **9.** $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$, **10.** $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ où $f(t) = \frac{\arctan t}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$, **10.** $\ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$.

Exercice 24. Soit $a \in]0, \pi[$. Soit $f(x) = \arctan(\frac{1+x}{1-x}\tan(\frac{a}{2}))$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1. Vérifier que pour tout $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{\sin a}{1 - 2x\cos a + x^2} = \frac{1}{2i}(\frac{1}{x - e^{ia}} - \frac{1}{x - e^{-ia}})$.

2. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \frac{a}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n} x^n$.

Exercice 25. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et $\forall x \neq 0$, $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. Prouver que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 26. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = \frac{1}{2}$ et $\forall x \neq 0$, $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$. Prouver que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 27. Soit f définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et } \forall x \in]-1, +\infty[\setminus\{0\},\ f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Prouver que $f \in \mathcal{C}^\infty(]-1, +\infty[, \mathbb{R})$.

Exercice 28.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'' + y' + y = e^x$.

2. On pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $x \in \mathbb{R}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f(x)$.

Exercice 29. On pose : $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\,d\theta$, $x \in \mathbb{R}$.
Prouver que f est DSE(0) sur $\mathbb{R}$ et préciser le développement de f.