Exercice 1. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n$.

Solution : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $a_n = \dfrac{n^3+n+3}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n x^n$.

`1. Calcul du rayon de convergence` R. On peut procéder de l'une des deux manières suivantes :

i) En utilisant la définition du rayon de convergence (et une propriété de croissances comparées).

Soit $I_a = \{r \in \mathbb{R}^+ / \text{la suite} (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{est majorée}\}$. Soit $r \in \mathbb{R}^+$. Comme $a_n > 0$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$,

$$r \in I_a \Leftrightarrow (n^2 r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{est majorée} \Leftrightarrow r \in [0,1[$$

car si $r \geq 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 r^n = +\infty$, donc la suite $(n^2r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, et si $r \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 r^n = 0$ par croissances comparées donc la suite $(n^2r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée car convergente. Donc $I_a = [0,1[$ et $R = \sup I_a = 1$.

ii) En utilisant une caractérisation du rayon de convergence (et la règle de D'Alembert).

On a $a_n > 0$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$, $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u_n(x) \neq 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| = |x|.$$

Donc d'après la règle de D'Alembert, si $|x| < 1$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument et si $|x| > 1$, la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement car $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n x^n| = +\infty$ ce qui implique que $u_n(x) \not\to 0$.

Par conséquent $R = 1$.

`2. Calcul de la somme` $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ `pour` $x \in]-1,1[$.

En effectuant par exemple la division euclidienne de $X^3 + X + 3$ par $X+1$, on obtient l'égalité :

$$X^3 + X + 3 = (X+1)(X^2 - X + 2) + 1.$$

D'où la décomposition de a_n en « éléments simples » : $a_n = n^2 - n + 2 + \dfrac{1}{n+1}$.

On en déduit que pour tout $x \in]-1,1[\backslash\{0\}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(n^2-n+2)}_{=n(n-1)+2} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\
&= \sum_{n=\cancel{0}2}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\
&= x^2 (\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)'' + \frac{2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} \\
&= x^2 \cdot \frac{2}{(1-x)^3} + \frac{2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{4x^2-4x+2}{(1-x)^3} - \frac{\ln(1-x)}{x}
\end{aligned}$$

et $f(0) = a_0 = 3$.

Remarque : La fonction f est la fonction somme d'une série entière de rayon 1. Donc f est continue sur $]-1,1[$ et en particulier continue en 0. On peut vérifier que c'est bien le cas : $\lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0, x\neq 0} (\dfrac{4x^2-4x+2}{(1-x)^3} - \dfrac{\ln(1-x)}{x}) = 2 - (-1) = 3 = f(0)$.

Exercice 2. Soit $p_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{2^k}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Indications : Rappel : $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. En dérivant terme à terme cette somme de série entière (de rayon de convergence 1), on obtient que $\forall x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} (= \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1})$ $(*)$.

Considérer alors $\ln(p_n)$ et déduire de $(*)$ avec $x = \frac{1}{2} \in]-1,1[$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 4$.

Exercice 3. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} \dfrac{n}{(2n+1)!}\, x^n$.

Indications : `1. Calcul du rayon de convergence` R.

En utilisant par exemple la règle de D'Alembert, on obtient $R = +\infty$.

`2. Calcul de la somme` $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ `pour` $x \in \mathbb{R}$.

Comme $n = \frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}$, $a_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(2n)!} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(2n+1)!}$. En déduire que :

$$\forall x > 0,\ f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{sh}(\sqrt{x}),\ \forall x < 0,\ f(x) = \frac{1}{2}\cos(\sqrt{-x}) - \frac{1}{2\sqrt{-x}}\sin(\sqrt{-x})$$

et (directement) $f(0) = a_0 = 0$.

Exercice 4. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{1+\cdots+n}$.

Indications : Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

`1. Calcul du rayon de convergence` R.

On a donc : $a_n := \dfrac{1}{1+\cdots+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n^2}$. On obtient $R = 1$ en utilisant la règle de D'Alembert.

`2. Calcul de la somme` $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ `pour` $x \in \mathbb{R}$.

Comme $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$, on a, pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \\ &= -2\ln(1-x) - \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -2\ln(1-x) - \frac{2}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ &= -2\ln(1-x) - \frac{2}{x}(-\ln(1-x) - x) = \frac{2(1-x)\ln(1-x)}{x} + 2 \end{aligned}$$

et $f(0) = a_0 = 0$. *Remarque. Cette fonction f est bien continue en 0 conformément au cours car* $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$.
En effet, $\lim_{x\to 0} \dfrac{2(1-x)\ln(1-x)}{x} = -2$.

Exercice 5. Préciser le DSE(0) des fonctions suivantes :
1. $f(x) = \sin^3 x$, **2.** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$, **3.** $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$, **4.** $f(x) = \ln(x^2-7x+12)$, **5.** $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$,
6. $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ où $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 1$.

Solutions et/ou indications :

`1.` On «linéarise» $\sin^3 x$:

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}) = -\frac{1}{8i}(2i\sin(3x) - 6i\sin(x)) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin(3x)),$$

puis en utilisant le DSE(0) de $\sin(t)$ avec $t = x$ et $t = 3x$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin^3(x) = \frac{1}{4}\left(3\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(3-3^{2n+1})}{4(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Remarque : Comme ce DSE(0) est la série de Taylor de la fonction $\sin^3$ en 0, on obtient directement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\sin^3)^{(2n+1)}(0) = \frac{(-1)^n(3-3^{2n+1})}{4}.$$

`2.` On décompose la fraction $f(x)$ en éléments simples et on utilise le DSE(0) de $\dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1, 2\}$, $f(x) = -\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}$. D'où

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{3}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

`3.` *Un peu astucieux !* Pour tout $x \neq 1$, $1 + x + x^2 = \dfrac{1-x^3}{1-x}$, donc $f(x) = (1-x)\cdot\dfrac{1}{1-x^3}$. On remplace ensuite $\dfrac{1}{1-x^3}$ par son DSE(0) ce qui nous oblige à supposer désormais $x^3 \in]-1, 1[$, c'est-à-dire $x \in]-1, 1[$. Alors, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(x^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} - \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1} \left(= \sum_{p=0}^{+\infty} x^{3p} - \sum_{p=0}^{+\infty} x^{3p+1}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

avec : $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{3p}=1$, $a_{3p+1}=-1$ et $a_{3p+2}=0$.

4. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)=(3-x)(4-x)$. Donc $D_f=]-\infty,3[\cup]4,+\infty[$ et le rayon de convergence du DSE(0) cherché est nécessairement inférieur ou égal à 3. Or, pour tout $t\in]-1,1[$, $-\ln(1-t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^n}{n}$ $(*)$, donc, en utilisant deux fois $(*)$ avec $t=\frac{x}{3}$ et $t=\frac{x}{4}$, on obtient que pour tout $x\in]-3,3[$,

$$f(x)=\ln(\underbrace{3-x}_{>0})+\ln(\underbrace{4-x}_{>0})=\ln(12)+\ln(1-\underbrace{\frac{x}{3}}_{\in]-1,1[})+\ln(1-\underbrace{\frac{x}{4}}_{\in]-1,1[})=\ln(12)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}((\frac{1}{3})^n+(\frac{1}{4})^n)x^n.$$

5. On commence comme en 3. : pour tout $t\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $\dfrac{1}{1+t^2+t^4}=\dfrac{1}{1+t^2+(t^2)^2}=\dfrac{1}{\frac{1-t^6}{1-t^2}}=\dfrac{1-t^2}{1-t^6}$. Donc :

$$\forall t\in]-1,1[,\ \frac{1}{1+t^2+t^4}=(1-t^2)\sum_{p=0}^{+\infty}t^{6p}=\sum_{p=0}^{+\infty}t^{6p}-\sum_{p=0}^{+\infty}t^{6p+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n$$

avec : $\forall p\in\mathbb{N}$, $a_{6p}=1$, $a_{6p+2}=-1$, et $a_{6p+1}=a_{6p+3}=a_{6p+4}=a_{6p+5}=0$. Et comme la somme d'une série entière de rayon de convergence $R\in]0,+\infty]$ s'intègre terme à terme sur tout segment inclus dans $]-R,R[$, on obtient finalement que :

$$\forall x\in]-1,1[,\ F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{6p+1}}{6p+1}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{6p+3}}{6p+3}.$$

6. On utilise le DSE(0) de la fonction arctan : $\forall t\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $f(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{2n+1}$ (égalité vraie aussi si $t=0$). Par intégration terme à terme de la somme de cette série entière (de rayon de convergence 1) sur tout segment inclus dans $]-1,1[$, on a donc immédiatement :

$$\forall x\in]-1,1[,\ F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 6. Rayon de convergence R et somme pour $x\in]-R,R[$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq0}\frac{x^{4n}}{4n+1}$.

Indications. On obtient $R=1$ avec la règle de D'Alembert. Soit $x\in]-1,1[$. Posons $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{4n+1}$. On a : $f(0)=1$ et si $x\neq0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}g(x)$ avec $g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$. Comme g est la somme d'une série entière de rayon 1, g est dérivable terme à terme sur $]-1,1[$:

$\forall x\in]-1,1[,\ g'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{4n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(x^4)^n=\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1-x^2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}).$

Donc il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in]-1,1[$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\arctan(x)+\dfrac{1}{4}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})+c$. Or $g(0)=0$, donc $\forall x\in]-1,1[$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\arctan(x)+\dfrac{1}{4}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$ et enfin $\forall x\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $f(x)=\dfrac{1}{2x}\arctan(x)+\dfrac{1}{4x}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$.

Exercice 7. 1. Rayon de convergence des séries entières : a) $\displaystyle\sum_{n\geq0}z^{n^2}$, b) $\displaystyle\sum_{n\geq0}\tan(\frac{n\pi}{7})z^n$.

Indications. Ces deux séries entières ont pour rayon de convergence 1 :

a) divergence grossière pour $z=1$ et convergence absolue si $|z|<1$ car, par croissance comparée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n^2|z|^{n^2}=0$.

b) Posons $a_n=\tan(\frac{n\pi}{7})$, $n\in\mathbb{N}$. Comme tan est π-périodique, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+7}=a_n$ d'où $a_n\in\{a_0,\cdots a_6\}$. Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{7-n}=-a_n$ puis que $|a_n|\leq\tan(\frac{3\pi}{7})$. En déduire $R\geq1$ puis $R=1$ en montrant (par l'absurde) que la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Exercice 8. Justifier que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq0}a_nz^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq0}(-1)^na_nz^n$ ont le même rayon de convergence.

Solution. Pas très compliqué ! Notons $b_n=(-1)^na_n$ et R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nz^n$ (resp. $\sum b_nz^n$). Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|b_n|=|a_n|$, on a immédiatement :

$$I(b)=\{r\in\mathbb{R}^+/\,(|b_n|r^n)\text{ est majorée}\}=\{r\in\mathbb{R}^+/\,(|a_n|r^n)\text{ est majorée}\}=I(a).$$

Et, par définition du rayon de convergence d'une série entière, $R_b=\sup I(b)=\sup I(a)=R_a$.

Exercice 9. *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. Soit $a_n=(\frac{n}{n+1})^{n^2}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

1. a. Montrer que $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}Ce^{-n}$ où C est une constante réelle à préciser.

1. b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$.

2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \leq b_n \leq 3n^2+5$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$.

Solution : **1. a.** Rappelons que $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_n$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On a donc :

$$a_n = (\frac{n+1}{n})^{-n^2} = e^{-n^2\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_n)} = e^{-n}\cdot e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\varepsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{2}}e^{-n}$$

car $\lim_{n\to+\infty} e^{\varepsilon_n} = 1$. La constante C cherchée est donc $e^{\frac{1}{2}}$.

1. b. Notons $u_n(x) = a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Ce^{-n}$, $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} Ce^{-(n+1)}$. Pour tout x non nul, $u_n(x) \neq 0$ et :

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}|x|.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = e^{-1}|x|.$$

D'après la règle de D'Alembert, si $e^{-1}|x| < 1$, c'est-à-dire $|x| < e$, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument et si $|x| > e$, la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement car $\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$. Donc le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est égal à e.

Variante. D'après 1. a. et une propriété du cours, la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ a le même rayon de convergence que la série entière (géométrique) $\sum_{n\geq 1} Ce^{-n}x^n = \sum_{n\geq 1} C(\frac{x}{e})^n$ (égal à e).

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$ et $c_n = 3n^2+5$. On vérifie classiquement (en utilisant le critère de D'Alembert) que le rayon de convergence R_a de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est égal 1. De même le rayon de convergence R_c de la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ est égal à 1. Notant R_b le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, on a, par une propriété du cours, $R_b \leq R_a$ et $R_b \geq R_c$. D'où $R_b = 1$.

Exercice 10. *Vrai ou faux ?*
Soient (a_n) une suite réelle et R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
1. Si la série $\sum a_n$ converge, alors $R \geq 1$.
2. Si la série $\sum a_n$ converge absolument, alors $R = 1$.
3. Si la série $\sum a_n$ converge, mais ne converge pas absolument, alors $R = 1$.
4. Si pour tout n, $a_n \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2$ alors $R = \frac{1}{2}$.

Exercice 11. Cocher la bonne réponse :
1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum 2^n a_n z^n$ est égal à :

☐ $2R$ ☐ $\frac{R}{2}$.

2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $u \in \mathbb{C}^*$ tel que la série $\sum a_n u^n$ converge. Alors :

☐ $R \geq |u|$ ☐ $R \leq |u|$.

3. Soit (a_n) une suite réelle bornée. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Alors :

☐ $R \geq 1$ ☐ $R \leq 1$.

Exercice 12. Déterminer tous les réels x tels que la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n})\, x^n$ converge.

Réponse : $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{n})x^n$ converge si et seulement si $x \in [-1, 1[$.

Exercice 13. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $R \in]0, +\infty[$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.
Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{a_n} x^n$.

Une solution. Commençons par un bref rappel de cours sur le rayon de convergence. Soit $\sum b_n z^n$ une série entière de la variable $z \in \mathbb{C}$:
i) $I(b) = \{r \in \mathbb{R}^+ / \text{ la suite } (b_n r^n) \text{ est bornée}\} = \{r \in \mathbb{R}^+ / \text{ la suite } (|b_n| r^n) \text{ est majorée}\}$ est un *intervalle* de $\mathbb{R}^+$ contenant 0.
ii) Le rayon de convergence R_b de $\sum b_n z^n$ est, par définition, la borne supérieure de $I(b)$ si l'intervalle $I(b)$ est majoré ou est égal à $+\infty$ si l'intervalle $I(b)$ n'est pas majoré, c'est-à-dire si $I(b) = [0, +\infty[$ (R_b est « l'extrémité » de l'intervalle $I(b)$).
Suivant la valeur de b_n, il y a donc quatre types d'intervalle $I(b)$ possibles :
$I(b) = \{0\}$ et $R_b = 0$, $I(b) = [0, \rho[$ ou $I(b) = [0, \rho]$ avec $\rho > 0$ et dans ces deux cas $R_b = \rho$, $I(b) = [0, +\infty[$ et $R_b = +\infty$.
Enfin nous utiliserons ci-dessous le résultat suivant facile à prouver en exercice :
Soit (u_n) une suite réelle. La suite (u_n) est bornée si et seulement si la suite (u_n^2) est bornée.
Revenons maintenant à la question posée. Soit $b_n = \sqrt{a_n}$. Soit $r \in \mathbb{R}^+$. On a :

$$\begin{aligned} r \in I(b) \quad &\Leftrightarrow \quad \text{la suite } (b_n r^n) \text{ est bornée} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{la suite } ((b_n r^n)^2) \text{ est bornée} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{la suite } (a_n (r^2)^n) \text{ est bornée} \\ &\Leftrightarrow \quad r^2 \in I(a) \end{aligned}$$

Donc si $I(a) = [0, R[$, $I(b) = [0, \sqrt{R}[$ et si $I(a) = [0, R]$, $I(b) = [0, \sqrt{R}]$.
En conclusion, le rayon de convergence de la série entière $\sum \sqrt{a_n} x^n$ est égal à $\sqrt{R}$.
Le raisonnement effectué peut se généraliser :
Exercice. Soit $R \in [0, +\infty]$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum |a_n|^\alpha z^n$.

Exercice 14. Soit $C > 0$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $|a_{n+1}| \le C|a_n|$ pour tout n supérieur à un certain indice $N \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est au moins égal à $\frac{1}{C}$.

Réponse : On montre par récurrence que $\forall n \ge N$, $|a_n| \le C^{\,n-N}|a_N|$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a donc :

$$\forall n \ge N,\ |a_n x^n| = |a_n||x|^n \le |a_N| C^{-N} (C|x|)^n.$$

Par conséquent, si $|x| < \frac{1}{C}$, la convergence de la série géométrique $\sum (C|x|)^n$ implique par comparaison (de termes positifs) la convergence (absolue) de la série $\sum a_n x^n$. Donc $R \ge \frac{1}{C}$.

Exercice 15. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$ est égal à 1.
Indication : On rappelle qu'une série entière et sa série entière dérivée ont le même rayon de convergence.
On pose pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \dfrac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$.
3. Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $f(x)$.
4. Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\, d\theta$.

Une solution : **1.** D'après le cours sur les séries entières, $\displaystyle\sum_{n\ge1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$ et $\displaystyle\sum_{n\ge1} n a_n x^n = \sum_{n\ge1} \cos(n\theta)\, x^n$ ont même rayon de convergence R.
i) Soit $x \in]-1, 1[$. La série $\sum \cos(n\theta) x^n$ converge absolument par comparaison car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\cos(n\theta)\, x^n| = |\cos(n\theta)||x|^n \le |x|^n$$

et la série géométrique $\sum |x|^n$ converge car $|x| \in [0, 1[$. D'où $R \ge 1$.
ii) La suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$. En effet, si c'était le cas, on aurait aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos((n+1)\theta) = 0$ et l'égalité : $\cos((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) = \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)$ impliquerait $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\theta) = 0$ (car $\sin(\theta) \ne 0$) et on aurait donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{(\cos^2(n\theta) + \sin^2(n\theta))}_{=1} = 0$ ce qui est absurde. D'où $R \le 1$ par divergence grossière de la série entière $\displaystyle\sum_{n\ge1} \cos(n\theta)\, x^n$ en $x = 1$.
En conclusion, $R = 1$.
2. Comme f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$, f est, par théorème, indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-1, 1[$. En particulier, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \text{Re}\ (x^{n-1} e^{in\theta}) = \text{Re}\ (\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} e^{in\theta}) = \text{Re}\ (e^{i\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} (xe^{i\theta})^{n-1}) = \text{Re}\ (e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^n).$$

Comme $|xe^{i\theta}| = |x||e^{i\theta}| = |x| < 1$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{i\theta})^n = \frac{1}{1 - xe^{i\theta}}$ et finalement :

$$f'(x) = \text{Re}\ \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} = \text{Re}\ \frac{e^{i\theta}(1 - xe^{-i\theta})}{(1 - xe^{i\theta})(1 - xe^{-i\theta})} = \text{Re}\ \frac{e^{i\theta} - x}{(1 - xe^{i\theta})(1 - xe^{-i\theta})} = \frac{\text{Re}\ (e^{i\theta} - x)}{1 - 2x\cos\theta + x^2} = \frac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}.$$

3. Considérons la fonction g, définie pour tout $x \in]-1,1[$, par : $g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$.

Remarque : si $x \in]-1,1[$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$, *on a :* $1 - 2x\cos\theta + x^2 = |1 - xe^{i\theta}|^2 > 0$ *car* $xe^{i\theta} \neq 1$ *puisque* $|xe^{i\theta}| = |x| < 1$.

Cette fonction g est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée : $g'(x) = \dfrac{\cos\theta - x}{1 - 2x\cos\theta + x^2}$. D'après la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = g(x) + C$ car f et g ont même dérivée sur *l'intervalle* $]-1,1[$. Comme $f(0) = g(0) = 0$, on conclut que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = g(x) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2x\cos\theta + x^2).$$

4. Fixons $x \in]-1,1[$ et posons pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $v_n(\theta) = \dfrac{\cos(n\theta)}{n}x^n$.

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions continues sur un segment sont satisfaites pour la série de fonctions $\sum v_n$, `de la variable` θ. En effet :

i) Chaque fonction $v_n : \theta \mapsto v_n(\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0,\pi]$, par composition car $\theta \mapsto n\theta$ et cos sont continues sur $\mathbb{R}$,

ii) La série de fonctions $\sum v_n$ (de la variable θ) converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$, et a fortiori sur $[0,\pi]$, car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|v_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{\theta\in\mathbb{R}} |v_n(\theta)| = \max_{\theta\in\mathbb{R}} |v_n(\theta)| = |v_n(0)| = \frac{|x|^n}{n}$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{|x|^n}{n}$ converge (de somme $-\ln(1-|x|)$).

Par conséquent d'après 3. :

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,d\theta = -2\int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(\theta)\,d\theta = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi v_n(\theta)\,d\theta = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\underbrace{\int_0^\pi \cos(n\theta)\,d\theta}_{=0} = 0$$

car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{n}(\sin(n\pi) - \sin(0)) = 0$.