Développement en série entière.

I. Généralités.

Définition 1. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dont le domaine de définition D contient un intervalle ouvert centré en 0.*
On dit que f est développable en série entière en 0 (ou au voisinage de 0) s'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels que : $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On dit alors que f est développable en série entière en 0 (DSE(0)) sur $]-r, r[$.
Autrement dit, f est DSE(0) si f est la somme, sur un intervalle ouvert centré en 0, d'une série entière.

Exemple 1. *1. Toute fonction polynôme est DSE(0) sur $\mathbb{R}$!*

2. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{3+2x}$, définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$, est DSE(0) sur $]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[$ car $\forall x \in]-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{3^{n+1}} x^n$.
Ici, $r = R = \frac{3}{2}$.

On sait que la (fonction) somme d'une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ est une fonction indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-R, R[$. Par conséquent :

Proposition 1. `[Unicité du DSE(0), série de Taylor en 0]` *Si f est DSE(0) sur $]-r, r[$, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$.*
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ et $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarque 1. *Une fonction DSE(0) est donc une fonction indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert $]-r, r[$ sur lequel elle est égale à la somme de sa série de Taylor en 0. Autrement dit, en revenant à la définition de la somme d'une série convergente, f est DSE(0) s'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.*

Corollaire 1. `[Développement limité à l'ordre` n`]` *Si f est DSE(0) sur $]-r, r[$, alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Exercice 1. Soit f définie par : $f(0) = 1$ et $\forall x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Prouver que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en montrant que f est DSE(0) sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. $(*)$ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\forall x > 0$, $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Prouver que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On précisera la valeur de $f^{(n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$. f est-elle DSE(0) ?

Proposition 2. `[Parité, imparité]` *Soit f une fonction DSE(0). Si f est paire (resp. impaire), son DSE(0) ne comporte que des puissances paires (resp. impaires).*

Démonstration. La dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est impaire (resp. paire) et une fonction impaire est nulle en 0. On en déduit que si f DSE(0) est paire (resp. impaire) alors $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = \frac{f^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} = 0$ (resp. $a_{2p} = \frac{f^{(2p)}(0)}{(2p)!} = 0$). □

En utilisant les propriétés sur la somme et le produit de deux séries entières, on a :

Proposition 3. `[Combinaison linéaire et produit de fonctions DSE(0)]`
Soient f, g deux fonctions DSE(0) sur $]-r, r[$. Posons : $\forall x \in]-r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Alors :

i) pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est DSE(0) sur $]-r, r[$ et $\forall x \in]-r, r[$, $(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$.

ii) Le produit fg est DSE(0) sur $]-r, r[$ et $\forall x \in]-r, r[$, $fg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

En utilisant les propriétés de la (fonction) somme d'une série entière, on a :

Proposition 4. `[Dérivée et primitive d'une fonction DSE(0)]`

Soit f une fonction DSE(0) sur $]-r,r[$. Posons : $\forall x \in]-r,r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors :

i) f' est DSE(0) sur $]-r,r[$ et $\forall x \in]-r,r[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

ii) Toute primitive F de f est DSE(0) sur $]-r,r[$ et $\forall x \in]-r,r[$, $F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

II. Deux DSE(0).

Proposition 5. `[DSE(0) de` $(1+x)^\alpha$`]` *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On a :*

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n. \tag{1}$$

Démonstration. Posons $I =]-1,1[$ et pour tout $x \in I$, $f(x) = (1+x)^\alpha$. Cette fonction f est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$ avec $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))\,(1+x)^{\alpha-n}$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))$.

La série de Taylor de f en 0 est donc la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ avec :

$$a_0 = f(0) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}.$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ car $\alpha \notin \mathbb{N}$, et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha-n}{n+1}$. Donc, pour tout $x \neq 0$, pour tout $n > \alpha$, $\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \frac{n-\alpha}{n+1}|x|$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x|$$

On en déduit classiquement par la règle de D'Alembert que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est égal à 1.

Posons alors, pour tout $x \in I$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$. Comme g est la somme d'une série entière de rayon 1, g est dérivable terme à terme sur $]-1,1[$ et comme $(n+1)a_{n+1} = (\alpha-n)a_n$, on a :

$$\forall x \in I,\ g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha-n) a_n x^n = \alpha g(x) - x g'(x).$$

Donc g est l'une des solutions sur I de l'équation différentielle d'ordre 1 homogène : $(1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0$.

Comme $x \mapsto -\alpha \ln(1+x)$ est une primitive sur I de $x \mapsto -\frac{\alpha}{1+x}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $g(x) = k(1+x)^\alpha$.

Or $g(0) = a_0 = 1$ donc $\forall x \in]-1,1[$, $g(x) = (1+x)^\alpha$, c'est-à-dire (1). □

Proposition 6. `[DSE(0) de` arcsin`]` $\forall x \in]-1,1[$, $\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Démonstration. Soit $t \in]-1,1[$. On a : $\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Comme $-t^2 \in]-1,0]$, en utilisant (1) avec $u = -t^2$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\arcsin'(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-(n-1))}{n!} (-t^2)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!} (-1)^n t^{2n} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!} t^{2n}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Soit $x \in]-1,1[$. D'après le cours sur les séries entières, la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ s'intègre terme à terme sur tout segment $[a,b] \subset]-R,R[$.

La série entière de la variable t de l'égalité (2), dont la somme est $\arcsin'$ sur $]-1,1[$, a un rayon de convergence égal à 1 (ce dernier résultat pouvant être facilement être vérifié à l'aide du critère de D'Alembert).

On peut ainsi l'intégrer terme à terme sur $[0,x]$ si $x \in [0,1[$ (ou sur $[x,0]$ si $x \in]-1,0]$). Par conséquent, en utilisant l'égalité (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\arcsin x = \arcsin x - \arcsin 0 &= \int_0^x \arcsin'(t)\,dt = \int_0^x \Big(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!} t^{2n}\Big)\,dt \\
&= \int_0^x 1\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!} \int_0^x t^{2n}\,dt \\
&= x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

III. Rappels : formule de Taylor avec reste intégral. Applications.

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|\cdot|$ la valeur absolue ou le module.
Dans cette section, a et b sont deux réels quelconques d'un intervalle I et n un entier naturel.

Théorème 1. `[Formule de Taylor avec reste intégral]`. *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. On a :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur n.

- *Initialisation.* Pour $n = 0$: si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, f' est continue sur I et $\displaystyle\int_a^b f'(t)\, dt = f(b) - f(a)$. Donc

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\, dt.$$

- *Hérédité.* Supposons le résultat vrai pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$.

Intégrons par parties $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$. On obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt &= \Big[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt. \qquad (3)\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$, on a, par hypothèse, l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Par conséquent, en utilisant (3), on obtient finalement que :

$$\begin{aligned}f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt\end{aligned}$$

ce qui établit le résultat au rang $n+1$. $\square$

L'inégalité de Taylor-Lagrange s'obtient à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral :

Théorème 2. *Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Soit M un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a, b]$ (ou sur $[b, a]$ si $b \leq a$). On a :*

$$\Big|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Remarque 2. *Comme $|f^{(n+1)}|$ est continue sur le segment $[a, b]$, $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur $[a, b]$ et atteint sa borne supérieure, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\forall x \in [a, b]$, $|f^{(n+1)}(x)| \leq |f^{(n+1)}(c)|$.*
On peut donc prendre $M = |f^{(n+1)}(c)| = \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ dans l'énoncé du théorème 2.

Démonstration. Supposons $a < b$. Utilisons la formule de Taylor-intégral du théorème 1. On a alors :

$$\begin{aligned}\Big|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big| &\leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \underbrace{|f^{(n+1)}(t)|}_{\leq M} dt \\ &\leq M \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, dt\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, dt = \Big[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big]_a^b = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, d'où $\displaystyle\Big|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Le cas $b \leq a$ se traite de la manière en utilisant : $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt = -\int_b^a \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$ $\square$

Cette inégalité permet de retrouver le DSE(0) de la fonction exponentielle :

Proposition 7. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.*

Démonstration. La fonction exponentielle (exp) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$.
En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Utilisons l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $f = \exp$, $a = 0$ et $b = x$ à l'ordre n.
Comme $\forall t \in [0, x]$, $|\exp^{(n+1)}(t)| = \exp(t) \leq e^x$, on peut choisir $M = e^x$ et on obtient :

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4}$$

Le critère de D'Alembert permet de prouver que la série $\sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. L'inégalité (4) et le théorème des gendarmes permettent de conclure.
Le cas $x \leq 0$ se traite de la même façon (ici $M = 1$ car $\forall t \in [x, 0]$, $|\exp^{(n+1)}(t)| = \exp(t) \leq 1$) avec l'inégalité

$$|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

□

Le résultat élémentaire suivant permet de prouver que cos et sin sont DSE(0) sur $\mathbb{R}$:

Proposition 8. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ telle qu'il existe $C > 0$ de sorte que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leq C.$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Autrement dit, f est DSE(0) sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $f \in \mathcal{C}^{n+1}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, l'inégalité de Taylor-Lagrange donne directement

$$|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)| \leq C \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

car C est par hypothèse un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[0, x]$ (ou sur $[x, 0]$ si $x \leq 0$). Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ (cf. preuve de la proposition précédente), le théorème des gendarmes permet de conclure que $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. □

Le résultat suivant plus technique est hors programme. Il peut être utile d'en comprendre la preuve :

Proposition 9. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a, a[, \mathbb{K})$ telle qu'il existe deux réels strictement positifs M et r de sorte que*

$$\forall x \in]-a, a[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |f^{(n)}(x)| \leq M n!\, r^n.$$

Soit $b = \min(a, \frac{1}{r})$. Alors $\forall x \in]-b, b[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$: f est donc DSE(0) au voisinage de 0.

Démonstration. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]-a, a[$. Posons $R_N(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\, dt$. Vérifier que $|R_N(x)| \leq M(r|x|)^{N+1}$ et conclure avec la formule de Taylor avec reste intégral. □

IV. DSE(0) usuels. Ce paragraphe regroupe les DSE(0) classiques à connaître :

0. Soit $z \in \mathbb{C}$. On rappelle que si $|z| < 1$, alors $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

1. a. $\forall x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

1. b. $\forall x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$.

2. a. $\forall x \in]-1, 1]$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

2. b. $\forall x \in [-1, 1[$, $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Plus généralement, $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

4. a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

4. b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

5. a. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

5. b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

6. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Alors $\forall x \in]-1, 1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

7. $\forall x \in [-1, 1]$, $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

et à savoir retrouver rapidement :

8. a. $\forall x \in]-1, 1[$, $\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

8. b. $\forall x \in]-1, 1[$, $\arcsin x = x + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.