Spé PC. **Préparation de l'interrogation de mathématiques n^o 3 (16. 10. 2024)**

I. Exercices à revoir

Exercice 1. $\triangleright$ On rappelle que pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Prouver que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et préciser $\zeta'(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 2. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 3. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 4. Soit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de $\sum_{n\geq 1} a_n\, x^n$.

Exercice 5. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$.

Exercice 6. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!} x^n$.

II. Exercices à étudier [Voir la feuille d'exercices corrigés : séries entières]

Exercice 7. Rayon de convergence des séries entières : a) $\sum_{n\geq 0} z^{n^2}$, b) $\sum_{n\geq 0} \tan(\frac{n\pi}{7}) z^n$.

Exercice 8. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n$.

Exercice 9. Rayon de convergence R et somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{1+\cdots+n}$.

Exercice 10. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $R \in]0, +\infty[$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \sqrt{a_n} x^n$.