Fiche n°1

Électronique

Notation complexe et filtrage

L'objectif de cette fiche synthèse est de récapituler tous les savoirs à connaître par coeur concernant la notation complexe et l'étude des filtres. Elle vient en complément du TP n°1 qui travaillait les savoir-faire associés.

I Notation complexe

Un signal sinusoïdal s'écrit $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$ (ou $s(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$).

La grandeur complexe $\underline{s}(t)$ associée à $s(t)$ est obtenue en remplaçant $\cos(\ldots)$ par $e^{j\cdots}$. Ainsi on peut écrire :

$$s(t) = \mathrm{Re}(\underline{s}(t)) \qquad \text{et} \qquad \underline{s}(t) = S_\mathrm{m}\, \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{S}_\mathrm{m} e^{j\omega t} \tag{I.1}$$

avec $\underline{S}_\mathrm{m} = S_\mathrm{m} e^{j\varphi}$ l'*amplitude complexe*, de sorte que :

$$S_\mathrm{m} = |\underline{S}_\mathrm{m}| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg \underline{S}_\mathrm{m} \tag{I.2}$$

L'intérêt d'introduire la notation complexe est de remplacer les opérations de dérivation et d'intégration par des opérations simples :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t} = j\omega \underline{s} \quad \text{et} \quad \int \underline{s}(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega}\underline{s}(t) + cste \tag{I.3}$$

⚠ L'utilisation des grandeurs complexes est à proscrire dès qu'on manipule des produits de signaux (ou des produits de champs) ou des équations différentielles non linéaires !

II Régime forcé et filtrage

Le système est en régime forcé lorsque l'entrée est sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$.

II.1 Intérêt de la notation complexe

De manière générale pour un système régi par une équation différentielle linéaire, la solution se met sous la forme :

$$s(t) = s_h(t) + s_p(t) \tag{II.1}$$

- où $s_h(t)$ est la solution de l'équation homogène, correspondant au régime libre ou régime transitoire, avec
  $s_h(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si le système est stable ;
- et $s_p(t)$ est la solution particulière correspondant au régime forcé ou permanent.

Dans le cas d'une entrée sinusoïdale $e(t) = E_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi_e)$, la solution particulière est aussi sinusoïdale de même pulsation $s(t) = S_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi_s)$. Lorsque l'on passe en notation complexe, on suppose déjà que $s(t) = S_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi_s)$: *la notation complexe permet donc de déterminer la solution particulière de l'équation différentielle.*

II.2 Fonction de transfert

Pour des systèmes particuliers, qui ont entre autres la propriété d'être linéaires, il existe une propriété fondamentale :

Propriété d'un système linéaire, continu et temporellement invariant

Dans le domaine fréquentiel, il existe une fonction $\underline{H}(\omega)$, appelée fonction de transfert, telle que :

$$\text{Quelque soit l'entrée,} \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R},\ \underline{s}(\omega) = \underline{H}(\omega)\ \underline{e}(\omega) \tag{II.2}$$

Cette propriété implique que si un système fait apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre du signal de sortie par comparaison au spectre du signal d'entrée, alors ce système n'est pas **linéaire**.

Quelques définitions :

- la *fonction de transfert* ou *transmittance* du système :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega)}{\underline{e}(\omega)} \tag{II.3}$$

- le *gain linéaire* $G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|$.
- le *gain logarithmique* ou *gain en décibel* G_{dB}, dont l'unité est le décibel (dB), tel que

$$G_{\mathrm{d}B} = 20 \log |\underline{H}(\omega)| \tag{II.4}$$

- la *bande-passante à* $-3\,\mathrm{dB}$ est l'ensemble des pulsations ω vérifiant $G_{dB}(\omega) \geq G_{\mathrm{dB,\ max}} - 3\,\mathrm{dB}$ ou, de manière équivalente, $G(\omega) \geq \dfrac{G_{\mathrm{max}}}{\sqrt{2}}$. Les pulsations à la limite de la bande-passante s'appellent des pulsations de coupure ω_c.
- la *phase* $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega))$

II.3 Étude d'un filtre

L'étude théorique complète d'un filtre se réalise en 4 étapes (voir TP 1) :

1. Détermination de la nature du filtre, grâce aux schémas équivalents basses fréquences (BF) et hautes fréquences (HF).
2. Détermination de la fonction de transfert $\underline{H}$.
3. Tracé du diagramme de Bode asymptotique, en déterminant l'équivalent le plus simple possible de $\underline{H}$.
4. Tracé du diagramme de Bode réel.

a Filtre passe-bas d'ordre 1

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau} \qquad \text{et} \qquad \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Exemples : Circuit RC en sortie sur C ; circuit RL en sortie sur R

b Filtre passe-haut d'ordre 1

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} \qquad \text{et} \qquad \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

Exemples : Circuit RC en sortie sur R ; circuit RL en sortie sur L

c Passe-bas d'ordre 2

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{II.5}$$

Exemple : Circuit RLC série en sortie sur C

d Passe-bande d'ordre 2

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{H_0 \times \dfrac{j\omega}{Q\omega_0}}{1 + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}} \tag{II.6}$$

Exemple : Circuit RLC série en sortie sur R

Propriété à savoir : largeur de bande-passante à $-3\,\text{dB}$: $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}}$ avec ω_0 la pulsation centrale du passe-bande

II.4 Effet d'un filtre sur un signal sinusoïdal

Par la définition de la fonction de transfert $\underline{H}$, on déduit que la sortie s'écrit : $\underline{s} = \underline{H} \times \underline{e}$. On trouve alors l'amplitude S_m et la phase φ_s du signal de sortie :

$$S_m = |\underline{s}| = |\underline{H}| \times E_m = G(\omega)E_m \qquad \text{et} \qquad \varphi_s = \arg(\underline{s}) = \arg(\underline{H} \times \underline{e}) = \arg(\underline{H}) + \varphi_e = \varphi(\omega) + \varphi_e$$

Ainsi, la sortie du filtre est, en notation réelle : $s(t) = G(\omega)E_m \cos(\omega t + \varphi(\omega) + \varphi_e)$

II.5 Comportement dérivateur, intégrateur et moyenneur

- Dérivateur : $s(t) \propto \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} \iff \underline{H} \propto j\omega$: le gain a une pente de $+20\,\mathrm{dB/dcade}$ et la phase vaut $+90°$
- Intégrateur : $s(t) \propto \int e(t)\mathrm{d}t \iff \underline{H} \propto \dfrac{1}{j\omega}$: le gain a une pente de $-20\,\mathrm{dB/dcade}$ et la phase vaut $-90°$
- Moyenneur : le filtre coupe toutes les fréquences sauf la composante continue (qui a une fréquence nulle). Donc, le filtre doit être passe-bas et la fréquence f du fondamental du signal d'entrée doit vérifier $f \gg f_c$.