Fiche n°2

Électronique

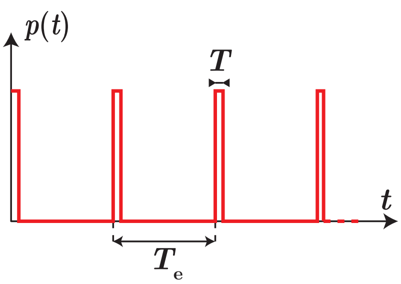
Échantillonnage

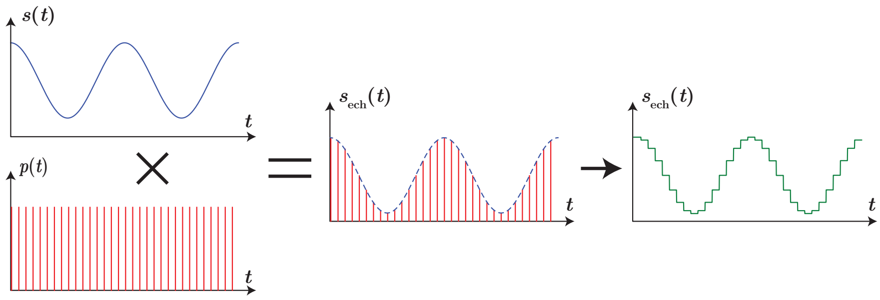
L'objectif de cette fiche est de traiter théoriquement et quantitativement l'effet de l'échantillonnage d'un signal sur le spectre de ce signal. Elle vient en complément du TP n°2 qui étudie les aspects qualitatifs puis expérimentaux.

Lors de la conversion analogique - numérique d'un signal, la première étape consiste à discrétiser l'échelle temporelle : il s'agit de l'échantillonnage.

I Principe de l'échantillonnage

On considère un signal analogique $s(t)$. L'idée consiste à utiliser un interrupteur parfait que l'on ferme pendant un intervalle de temps très court puis que l'on ouvre pendant T_e. On prélève ainsi les valeurs $s(nT_e)$, $n \in \mathbb{Z}$. Cela revient mathématiquement à multiplier le signal $s(t)$ par la fonction $p(t)$ représentée ci-contre. T_e est appelée la période d'échantillonnage et $f_e = \dfrac{1}{T_e}$ la fréquence d'échantillonnage.





Le signal échantillonné s_{ech} peut donc être considéré comme une suite de valeurs discrètes de $s(t)$.

Critère pour réaliser un échantillonnage correct : On sait que tout signal est caractérisé par son spectre (de nature discrète si le signal est périodique, ou de nature continue dans le cas général). Ainsi :

Un échantillonnage bien réalisé ne doit pas détériorer le signal. En particulier il doit conserver le spectre de $s(t)$ et il doit permettre de restituer ce spectre en fin d'opérations.

II Spectre du signal échantillonné

II.1 Signal sinusoïdal

Supposons que $s(t)$ soit sinusoïdal de fréquence f_0. La fonction $p(t)$ étant périodique de période T_e, elle est décomposable en série de Fourier selon:

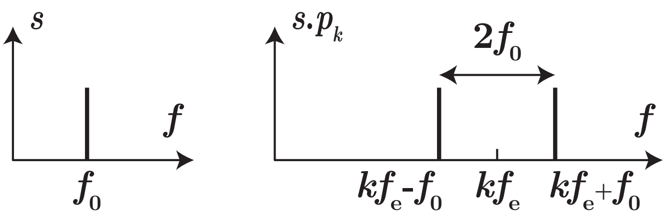
$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi k f_e\, t + \varphi_k$$

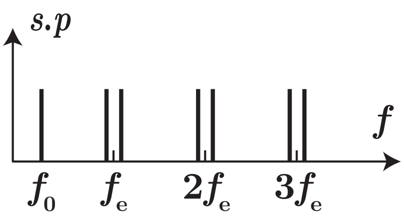
Le produit de la fonction $s(t)$ de fréquence f_0 par l'harmonique de rang k de $p(t)$ fait apparaître deux fréquences :

$$\cos 2\pi f_0 t \times \cos 2\pi k f_e t + \varphi_k = \frac{1}{2}\left(\cos 2\pi (k f_e + f_0) t + \varphi_k + \cos 2\pi (k f_e - f_0) t + \varphi_k \right)$$

On a donc deux fréquences dans le spectre du signal résultant : $|k f_e \pm f_0|$. L'allure des spectres est donc :

★



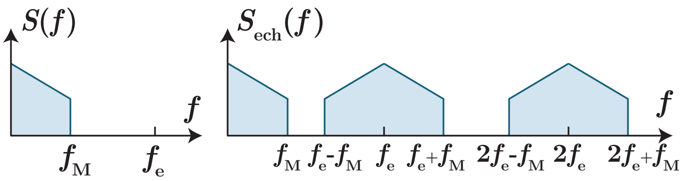


Opération est non linéaire.

II.2 Signal quelconque

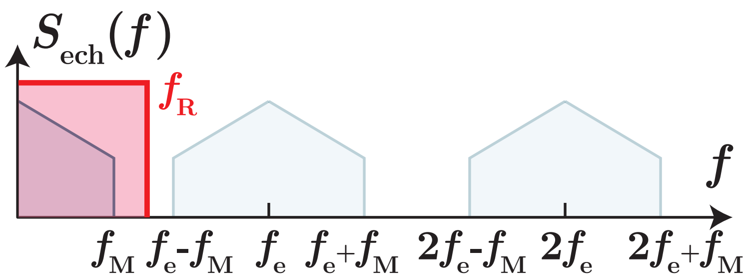
Considérons maintenant un signal quelconque $s(t)$, possédant un spectre continu s'étendant de 0 jusqu'à la fréquence f_{M}. En appliquant le raisonnement précédent à chaque composante spectrale de s, on obtient le spectre du signal échantillonné $s_{ech}(t) = s(t) \times p(t)$

★

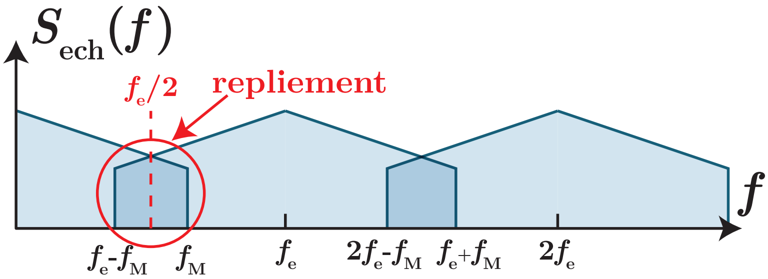


III Critère de Nyquist-Shannon

On veut que l'échantillonnage soit une opération réversible, c'est-à-dire qu'on puisse retrouver le spectre du signal initial $s(t)$ à partir du signal échantillonné. D'après les spectres ci-dessus, il faut pour cela appliquer au signal échantillonné un *filtre passe-bas*, de fréquence de coupure F_{R} sur le graphe ci-dessous, laissant passer le spectre du signal initial et coupant les fréquences supplémentaires apparues lors de l'échantillonnage.



Cependant, si la fréquence d'échantillonnage est mal choisie, c'est-à-dire si le signal est sous-échantillonné, on observera un enrichissement du spectre de $s_{ech}(t)$:



Le signal échantillonné contient, même en dessous de sa fréquence maximale f_{M}, des composantes qui ne sont pas présentes dans le signal initial. On dit qu'il y a *repliement* du spectre, ou en anglais *aliasing*.

Le graphe ci-dessus montre que, pour que seules apparaissent les fréquences comprises entre 0 et f_{M}, il faut que $f_{\mathrm{e}} - f_{\mathrm{M}} > f_{\mathrm{M}}$:

Critère de Nyquist-Shannon

Pour conserver son spectre, un signal doit être échantillonné à une fréquence f_{e} au moins deux fois supérieure à sa fréquence maximale f_{M} :

$$\boxed{f_{\mathrm{e}} > 2f_{\mathrm{M}}}$$

Quand on ne peut pas ou qu'on ne souhaite pas avoir une fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée ($f_{\mathrm{e}} > 2f_{\mathrm{M}}$), on utilise un filtre *anti-repliement* : un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_{\mathrm{c}} < f_{\mathrm{e}}/2$ *avant* d'échantillonner. Ainsi, on perd de l'information (la partie haute fréquence du spectre) mais on ne crée pas de "fausses fréquences" dans le spectre du signal échantillonné.

Exemples dans le domaine sonore :

Support	f_{e} *choisie*
CD audio	44.1 kHz
DVD	48 kHz
Téléphonie	8 kHz
Radio numérique	22.5 kHz

L'oreille humaine (jeune...) entend de 20 Hz à 20 kHz. Donc, on choisit $f_M = 20\,\mathrm{kHz}$. Ainsi, en choisissant $f_e > 2f_M = 40\,\mathrm{kHz}$, on ne détériore pas le rendu d'un signal audio.

D'après ce qui précède, une composante de fréquence f d'un signal est correctement restituée si $f < f_{\mathrm{e}}/2$. Au-delà, cette composante apparaîtra à une *fréquence apparente* différente de f. Quelle que soit f, il y a toujours une et une seule des fréquences du type $|kf_{\mathrm{e}} \pm f| \quad (k \in \mathbb{N})$ qui appartient à l'intervalle $[0,f_{\mathrm{e}}/2]$: c'est la fréquence apparente du signal échantillonné.

Remarque : Lors d'une manipulation, vous pouvez éventuellement repérer si vous avez un problème d'échantillonnage. En étudiant le spectre du signal et en augmentant la fréquence f du signal analysé, certains pics liés au repliement de spectre vont se déplacer vers la gauche (ceux du type $f_{\text{apparent}} = kf_{\mathrm{e}} - f$)!

Exercice : Déterminer la fréquence apparente mesurée pour un signal initial à $f = 10.1\,\mathrm{kHz}$ échantillonné avec une période $T_e = 100\,\mathrm{\mu s}$.

★ Fréquence d'échantillonnage : $f_e = \dfrac{1}{T_e} = 10\,\text{kHz}$ On cherche $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f_{\text{app}} = |kf_e \pm f| \in [0, f_e/2]$. Ici, $k = 1$: $f_{\text{app}} = 100\,\text{Hz}$.

IV Compromis entre le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e et la durée de l'acquisition T_a

IV.1 Lien entre f_e et T_a

Un appareil numérique réel a une capacité maximale de stockage, caractérisée par le nombre N de points qu'il peut enregistrer. Plus N est grand, plus le temps de traitement peut être long, plus l'appareil coûte cher, et plus le stockage prend de la place.

★ La durée totale d'acquisition est reliée à la période d'échantillonnage f_e :

$$T_a = (N-1) \times T_e = \frac{N-1}{f_e} \simeq \frac{N}{f_e} \qquad \text{si } N \gg 1$$

IV.2 Résolution spectrale δf

La résolution spectrale δf du spectre correspond à l'écart entre deux points calculés dans le spectre.

★ Plus δf est grand, plus l'incertitude sur les fréquences est grande.
Du fait de l'algorithme de calcul du spectre FFT, $N/2+1$ points sont calculés entre 0 et $f_e/2$. Donc :

$$\delta f = \frac{f_e/2}{N/2} = \frac{f_e}{N} \simeq \frac{1}{T_a}$$

Donc, plus T_a est grand, plus le spectre sera précis en fréquence, mais moins la fréquence d'échantillonnage sera élevée ($f_e = \frac{N}{T_a}$).

Ainsi, on doit réaliser un *compromis* entre la fréquence maximale à acquérir et la résolution spectrale.

Exercice : On souhaite tracer le spectre d'un signal jusqu'à la fréquence de 20 kHz, avec une résolution spectrale de 10 Hz. Combien de points N d'acquisition doit au minimum posséder l'oscilloscope pour respecter ces deux critères ? Que se passe-t-il si l'oscilloscope n'a pas assez de points ?

★ $f_M = 20\,\text{kHz} \Rightarrow f_e > 2f_M = 40\,\text{kHz}$ (Shannon)
$\frac{1}{T_a} = 10\,\text{Hz}$
Donc, $N = f_e \times T_a + 1 = \frac{40\,\text{kHz}}{10\,\text{Hz}} + 1 \simeq 4000$ points. C'est bon pour les oscilloscopes de TP (40 000 points), mais pas pour la plateforme Orphy GTI d'acquisition (2000 points environ). Si l'appareil numérique possède moins de 4000 points, il faut faire un choix :

- soit on sous-échantillonne (fréquence fausse, mais résolution suffisante)
- soit on a une moins bonne résolution spectrale