

Calculatrices autorisées

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin, de la clarté et de la rigueur de la rédaction. Les résultats doivent être encadrés et justifiés ; les mots-clés doivent être soulignés.

Il est rappelé qu'une application numérique donnée sans unité est considérée comme nulle, que les axes d'une courbe doivent être précisés et qu'une formule non homogène ne rapporte aucun point.

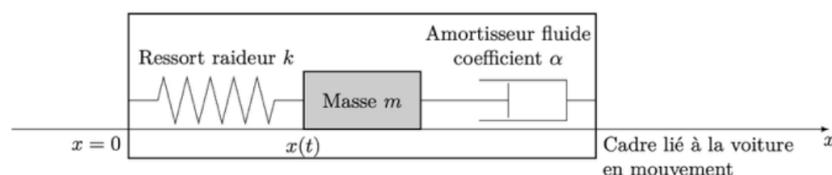
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera clairement sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Utilisation d'un matériau piézoélectrique dans un airbag [D'après Centrale TSI 2020]

On se propose dans cette partie d'analyser le principe de détection d'un choc, conduisant au gonflage d'un airbag, à l'aide d'un matériau piézoélectrique.

II.A - Principe d'un accéléromètre

On considère une masse m susceptible de se déplacer par rapport à une voiture ; lors d'une phase de freinage, le référentiel lié à la voiture est non galiléen. L'ensemble est modélisé en figure 1.


Figure 1

La masse m se déplace horizontalement et sans frottement solide sur un support lié à la voiture. Le ressort a pour constante de raideur k et pour longueur à vide L_0 . L'amortisseur exerce une force de frottement fluide sur la masse, son expression étant $\vec{f} = -\alpha \vec{V}$ où \vec{V} représente la vitesse de la masse dans le référentiel lié à la voiture. Le vecteur unitaire de l'axe des x , orienté dans le sens des x positifs, est noté \vec{u}_x . Le référentiel lié à la voiture est animé de l'accélération $\vec{a} = -a\vec{u}_x$ (avec $a > 0$) par rapport au référentiel terrestre considéré quant à lui comme galiléen.

Q 1. Effectuer le bilan des différentes forces s'exerçant sur la masse m . Etablir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.

Q 2. Montrer que l'équation différentielle du mouvement en $X(t) = x(t) - L_0$ peut être mise sous la forme :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_0 \quad \text{en exprimant } Q, \omega_0 \text{ et } X_0 \text{ en fonction de } m, k \text{ et (ou) } a.$$

Résolution

On suppose que la phase de freinage commence à $t = 0$ et on note t_0 l'instant correspondant à l'arrêt complet de la voiture. On suppose qu'avant la phase de freinage, la vitesse de la voiture est constante. On s'intéresse au cas où le facteur de qualité Q est égal à $1/2$.

Q 3. Quelle est l'expression de $X(t)$ pour $t < 0$?

Déterminer l'expression de $X(t)$ entre $t = 0$ et t_0 .

Q 4. Représenter l'allure des variations de $X(t)$ pour tout t , en supposant que le régime permanent a le temps de s'établir entre $t = 0$ et t_0 . On précisera en particulier l'expression approchée de $X(t)$ à $t = t_0$ ainsi que sa valeur si t tend vers l'infini.

II.B - Utilisation du matériau piézoélectrique

L'idée générale est que le matériau doit permettre la mesure de l'accélération d'une voiture qui va, au cours d'un choc, varier brutalement. On ne considèrera dans cette partie qu'un mouvement de translation rectiligne de la voiture.

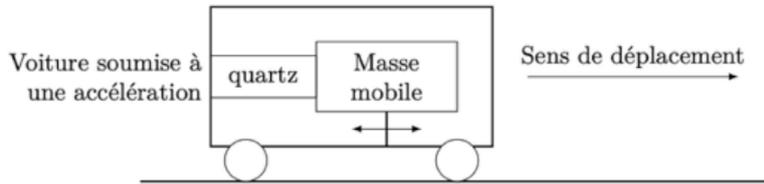


Figure 2

Lors d'une variation de vitesse de la voiture, la masse mobile va plus ou moins comprimer le cristal entraînant l'apparition d'une différence de potentiel entre ses deux faces.

Le problème est de différencier un freinage brutal d'un choc. On va considérer deux cas avec l'hypothèse simplificatrice consistant à considérer que l'accélération de la voiture reste constante jusqu'à son arrêt complet.

Cas numéro 1 : Freinage brutal

La voiture roule à vitesse constante $V = 90 \text{ km.h}^{-1}$. On suppose que la voiture s'arrête totalement après $\Delta t = 2,5 \text{ s}$.

Q 5. Calculer la valeur numérique de l'accélération moyenne durant la phase d'arrêt de la voiture.

Cas numéro 2 : Arrêt suite à un choc

On néglige la déformation de la voiture de sorte que l'ensemble de celle-ci est animée de la même vitesse par rapport au sol à un instant donné. La voiture roule à la vitesse constante $V = 90 \text{ km.h}^{-1}$ et on suppose qu'elle s'arrête totalement en $\Delta t = 0,15 \text{ s}$.

Q 6. Calculer la valeur numérique de l'accélération moyenne durant la phase d'arrêt de la voiture.

Le cristal de quartz utilisé a pour masse $m = 2,81 \text{ g}$. Il est caractérisé par la quantité χ correspondant au rapport entre la tension apparaissant à ses bornes et l'intensité de la force à laquelle il est soumis. On donne ici : $\chi = 6,0 \text{ V.N}^{-1}$.

Q 7. Déterminer, dans les deux cas précédents, la valeur numérique de la différence de potentiel qui apparaît aux bornes du cristal de quartz. La différence vous semble-t-elle décelable ?

Q 8. Les variations de la tension aux bornes de la lame sont analogues à celles de $X(t)$ obtenues à la question 4, le facteur de qualité étant égal à $1/2$. Justifier le choix de ce coefficient et préciser quel serait le problème si le régime permanent n'était pas atteint entre $t = 0$ et t_0 .

II.C - Microgénérateur piézoélectrique

Un élément piézoélectrique est collé à une «poutre» de masse M , qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures. L'élément piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique, ce qui constitue une source autonome de puissance.

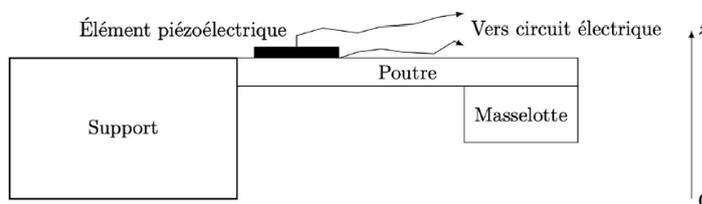


Figure 3

On appelle \vec{F}_E la force excitatrice ambiante, supposée sinusoïdale : $\vec{F}_E = F_E \vec{u}_z = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On travaille dans un référentiel terrestre. On se place en régime sinusoïdal forcé.

Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre peut être modélisé par l'équation mécanique :

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz = F_E$$

Q 9. Indiquer à quel type de forces correspondent $-kz$ et $-\alpha \frac{dz}{dt}$. Expliquer qualitativement quelles caractéristiques de la poutre sont modélisées par ces forces.

Q 10. On pose $z(t) = \text{Re}(Z_m e^{i\omega t})$. Exprimer Z_m , amplitude complexe de la vibration mécanique suivant l'axe vertical (Oz). Dans toute la suite de cette partie on se place à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/M}$.

Q 11. Décrire, à cette pulsation, le mouvement du centre d'inertie de la poutre.

Q 12. Dédire de ce qui précède l'expression de la vitesse de déplacement vertical v_z du centre d'inertie de la poutre en fonction de F_0 , α , ω_0 et du temps.

La partie électrique du dispositif peut être modélisée de la façon suivante : une source de courant d'intensité βv_z est disposée en parallèle avec un condensateur de capacité C_0 et une résistance d'utilisation R . Soit V la tension aux bornes de R . On veut montrer que la puissance moyenne récupérée par le dipôle d'utilisation est proportionnelle au carré de F_0 .

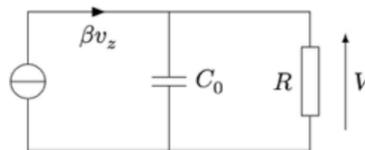


Figure 4

Q 13. β est appelé facteur de force : c'est le rapport entre la force appliquée à la lame piézoélectrique et la tension aux bornes de celle-ci. Montrer que βv_z est homogène à l'intensité d'un courant électrique.

Q 14. Exprimer V_m , amplitude complexe de la tension aux bornes de la résistance d'utilisation en fonction de α , β , F_0 , R , C_0 et ω_0 . En déduire l'expression de la puissance moyenne récupérée P par la résistance d'utilisation.

EXERCICE 2 : La marche du berger landais sur échasses

[CCINP MP 2024]

Afin de parcourir de longues distances dans la lande et pour surveiller leurs troupeaux de moutons, les bergers landais utilisaient des échasses (**photo 3**). Les premiers témoignages de cette pratique remontent au XVIII^e siècle. Celle-ci a progressivement disparu jusqu'au début du XX^e siècle avec l'extension de la forêt qui marqua la fin du pastoralisme. De nos jours, des groupes folkloriques d'échassiers s'attachent à perpétuer et à faire revivre ce patrimoine culturel landais.



Photo 3 - Berger landais surveillant son troupeau de moutons du haut de ses échasses (<https://photoshistoriques.info/lechasse-la-marche-des-bergers-de-france-prairies-1843-1937>)

Les échasses sont constituées de deux pièces de bois : l'escasse ("jambe" en patois landais) et le *paouse pé* ("repose pied"), fixé sur l'escasse, le plus souvent à une hauteur par rapport au sol comprise entre 90 cm et 1,20 m. Deux lanières de cuir sont prévues pour que l'échassier attache son pied et sa jambe à l'échasse.

On se propose d'étudier la marche sur échasses en établissant quels paramètres mécaniques sont modifiés par rapport à la marche ordinaire et de déterminer s'il est pertinent de qualifier cette pratique de "marche à pied augmentée".

Commençons par décrire la marche ordinaire : la marche est une activité complexe, nécessitant l'action coordonnée de 48 muscles de contrôle de la position du tronc et des membres inférieurs afin de permettre au marcheur de se déplacer vers l'avant avec un rendement optimal.

Le cycle de la marche comprend deux phases pour chaque jambe : une phase de double contact et une phase d'oscillation, illustrées en **figure 6**. Les schémas en **figure 7a** et **7b** précisent les notations utiles à la description des phases de double contact et d'oscillation gauche.

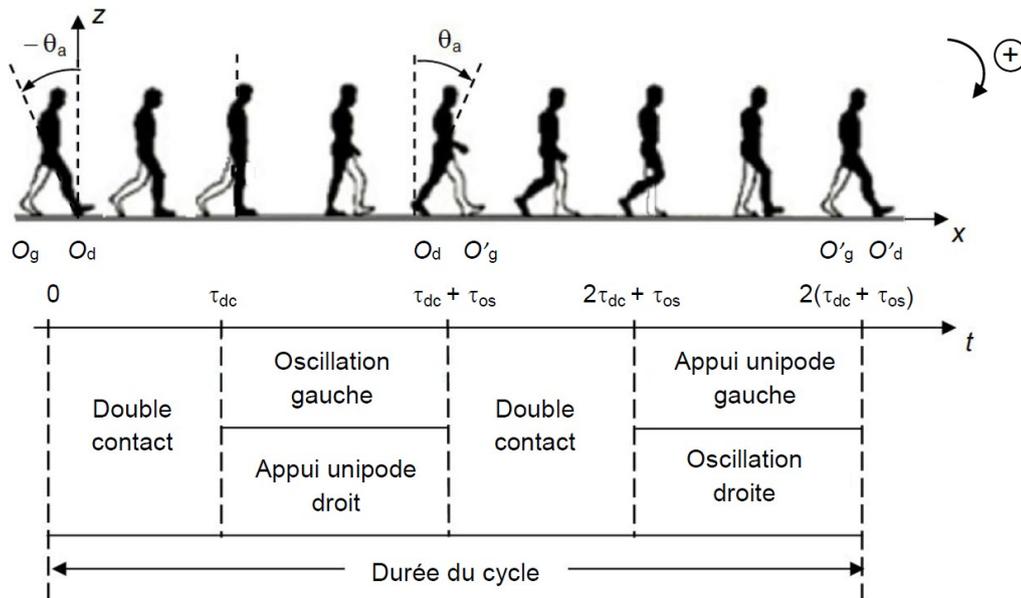


Figure 6 - Phases du cycle de la marche

La description du mouvement est menée dans le référentiel du sol supposé galiléen.

Phase de double contact

À la date $t = 0$, la jambe droite prend appui sur le sol, en O_d (elle vient de terminer son oscillation) (**figures 6 et 7a**) ; elle est immobile à cet instant (sa vitesse angulaire de rotation est nulle : $\Omega(0) = 0$) et se trouve inclinée d'un angle $\theta = -\theta_a$ par rapport à la verticale ascendante $O_d z$. Grâce à l'action des muscles, elle amorce alors un mouvement de rotation à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$ autour de l'axe $O_d y$ perpendiculaire au plan de figure ($xO_d z$), tandis que la jambe gauche, elle aussi en appui sur le sol, en O_g , transfère le poids du corps sur la jambe droite : durant cette phase, de durée τ_{dc} , l'énergie cinétique des deux jambes augmente et le centre de masse du buste s'élève. À la date $t = \tau_{dc}$, la jambe droite passe par la position verticale, tandis que la jambe gauche, libérée du poids du corps, quitte son appui au sol.

Phase d'oscillation gauche

À partir de la date $t = \tau_{dc}$ et jusqu'à la date $t = \tau_{dc} + \tau_{os}$, la jambe gauche, libérée de son appui au sol, opère, sous la seule action de son poids, une oscillation pendulaire de durée τ_{os} autour de l'axe de son pivot fémoral $F_g y$ (**figure 7b**) (on suppose que la présence du sol ne gêne pas l'oscillation). Cette phase est concomitante de la phase d'appui unipode droit (nommée ainsi car seule la jambe droite est alors en appui au sol et poursuit sa rotation autour de $O_d y$ jusqu'à la position $\theta = \theta_a$ représentée en pointillés sur la **figure 7a**).

Appuis au sol et définition du pas

Après son appui au sol au point O_g , la jambe gauche reprend appui au sol en O'_g , à la distance $2p$ devant O_g et à la distance p devant O_d : $p = O_g O_d = O_d O'_g$ définit le **pas** de la marche.

Le cycle se poursuit alors en intervertissant les rôles des jambes gauche et droite.

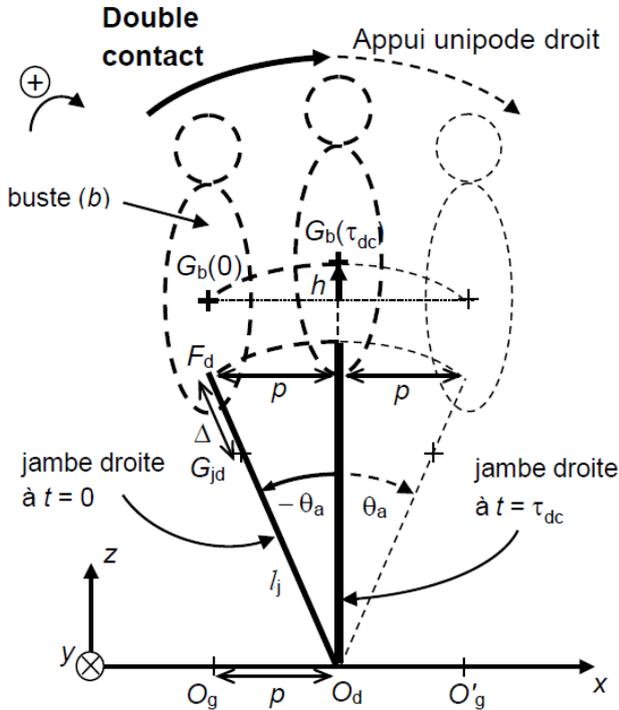


Figure 7a - Phase de double contact

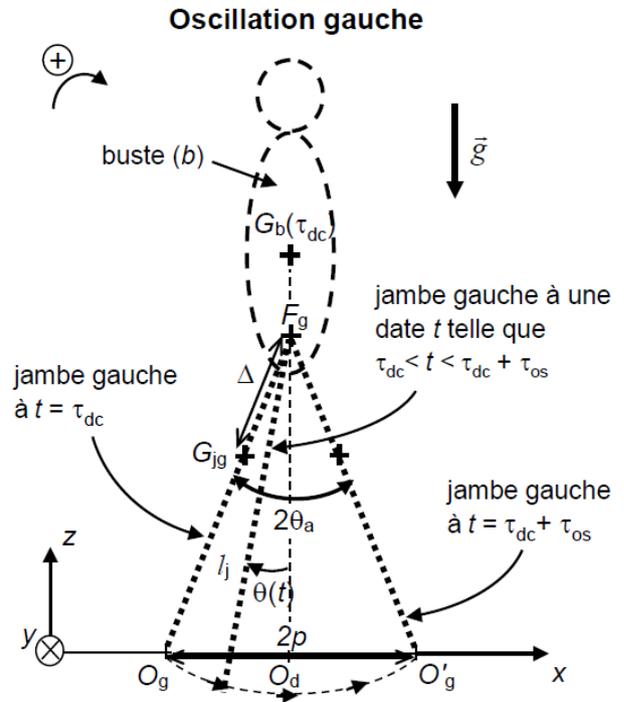


Figure 7b - Phase d'oscillation gauche

On adopte le modèle mécanique simplifié suivant :

Chaque jambe est modélisée par une tige solide, de longueur l_j , de masse m_j , de centre de masse G_j et d'extrémité F (pivot fémoral). Ces points sont notés G_{jd} et F_d pour la jambe droite (j_d) et G_{jg} et F_g pour la jambe gauche (j_g). Le buste (b) est modélisé comme un solide de masse m_b et de centre de masse G_b . L'ensemble $(\Sigma) = \{(j_d), (j_g), (b)\}$ constitue le marcheur.

On note :

- $\Delta = F_d G_{jd} = F_g G_{jg}$.
- $\bar{g} = -g \bar{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.
- J_F le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $F_d y$ (respectivement $F_g y$).
- J_O le moment d'inertie de (j_d) (respectivement de (j_g)) par rapport à l'axe $O_d y$ (respectivement $O_g y$).

III.1 - Étude de la phase d'oscillation gauche

Soit $\theta(t)$ la position angulaire de (j_g) par rapport à la verticale ascendante (**figure 7b**).

Q18. En appliquant le théorème du moment cinétique à (j_g) dans le référentiel du buste supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ pendant cette phase d'oscillation.

Q19. a) Définir ce que sont des oscillations isochrones.

b) Dans l'approximation des petits angles, le mouvement de (j_g) est-il isochrone ?

c) Exprimer, dans cette approximation, la pulsation ω_{os} et la durée τ_{os} de cette phase oscillante en fonction de m_j , J_F , g et de Δ .

III.2 - Étude de la phase de double contact

Afin d'évaluer le coût énergétique de la marche, on adopte les quatre hypothèses suivantes lors de la phase de double contact :

- le buste est animé d'un mouvement de translation quasi-uniforme, de vitesse moyenne $\vec{V}_{dc} \approx V_{dc} \vec{u}_x$ avec $V_{dc} = \frac{p}{\tau_{dc}}$ (la composante verticale de \vec{V}_{dc} est donc négligée).
- Les variations d'énergie potentielle de pesanteur de (j_d) et de (j_g) sont négligées.
- Les variations d'énergie cinétique de (j_d) et de (j_g) sont supposées égales.
- Le mouvement de rotation de (j_d) autour de $O_d y$ s'effectue à la vitesse angulaire variable $\Omega(t)$, avec $\Omega(t=0) = 0$.

Q20. On note $h = z_{G_b(\tau_{dc})} - z_{G_b(0)}$ la variation d'altitude du point G_b entre les instants de dates $t=0$ et $t=\tau_{dc}$ (**figure 7a**). Exprimer la variation $\Delta\mathcal{E}$ de l'énergie mécanique de (Σ) entre ces deux instants, en fonction de J_O , $\Omega(\tau_{dc})$, m_b , g et de h .

III.3 - Coût énergétique et pas optimal de la marche ordinaire

Q21. En supposant quasi-constante la puissance \mathcal{P} fournie par les muscles pendant la phase de double contact, on évalue \mathcal{P} par $\mathcal{P} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\tau_{dc}}$.

Rappeler l'énoncé du théorème de la mécanique dont découle cette relation d'évaluation de \mathcal{P} .

Q22. Avec $h \approx \frac{p^2}{2l_j}$ (expression approchée de h valable pour les petits angles θ_a) et en supposant des conditions de marche telles que $\Omega(\tau_{dc}) = \omega_{os}$, avec ω_{os} la pulsation trouvée à la question **Q19.c**, montrer que $\mathcal{P} = \left(\frac{J_O m_j \Delta}{J_F p} + \frac{m_b p}{2l_j} \right) g V_{dc}$.

Q23. Obtenir l'expression du pas p_{opt} qui minimise \mathcal{P} .

Q24. Application numérique :

Avec $l_j = 1$ m, $m_j = 10$ kg, $m_b = 60$ kg, calculer p_{opt} dans le cas d'une jambe à répartition de masse uniforme, pour laquelle on a alors $\Delta = l_j / 2$ et $J_O = J_F$.

Le télescope JWST a été placé en un point de l'espace tel qu'un objet massif y demeure immobile par rapport à la Terre et au Soleil. Ce point particulier, désigné par L_2 , est un « point de Lagrange ». Il est situé au-delà de la Terre sur l'axe Soleil-Terre (voir figure 8).

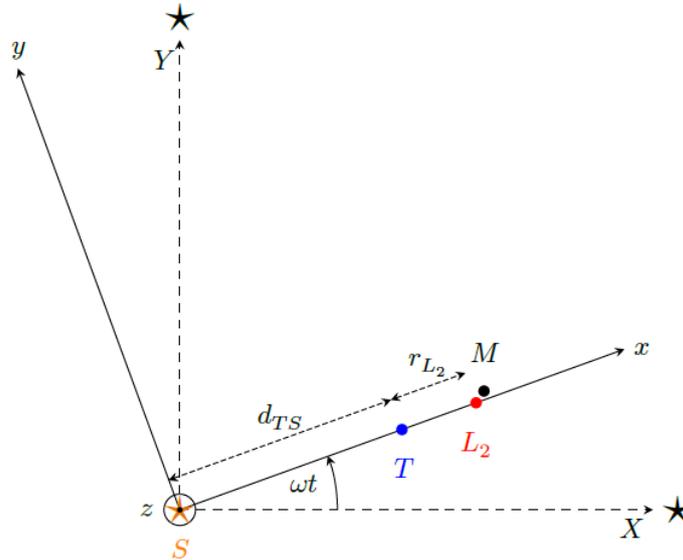


Figure 8 Position du point de Lagrange L_2 . Le point M est un point voisin de L_2 . La figure n'est pas à l'échelle.

Le référentiel \mathcal{R}_h a pour origine le centre du Soleil S ; on lui associe un repère d'espace orthonormé $(S; XYZ)$. Les axes (SX) , (SY) et (SZ) pointent vers trois étoiles très éloignées. On définit le référentiel \mathcal{R} comme étant le référentiel, admettant le centre du Soleil S comme origine, dans lequel le centre du Soleil S et le centre de la Terre T sont fixes, et de repère orthonormé associé $(S; xyz)$. Le point de Lagrange L_2 est à la distance r_{L_2} de la Terre. On note d_{TS} la distance entre les centres du Soleil et de la Terre (voir figure 8). Le référentiel \mathcal{R} est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Sz) à la vitesse angulaire constante ω par rapport au référentiel \mathcal{R}_h .

Le référentiel \mathcal{R}_h est une bonne réalisation de référentiel galiléen. La masse du Soleil est notée M_S , celle de la Terre, M_T et celle du télescope JWST, m .

On donne : $\omega = \sqrt{\frac{GM_S}{d_{TS}^3}}$.

Q 27. Rappeler le nom usuellement attribué au référentiel \mathcal{R}_h .

Q 28. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen et justifier que le référentiel \mathcal{R} est non galiléen.

Q 29. On considère que le télescope JWST, positionné au point L_2 , n'est soumis qu'à l'action gravitationnelle du Soleil et de la Terre. En adoptant le point de vue du référentiel \mathcal{R} , écrire la relation vectorielle qui traduit l'immobilité en L_2 du télescope JWST dans ce référentiel.

Cette relation vectorielle conduit à une équation de la forme $F(R, \alpha) = 0$ où F est une fonction de la variable adimensionnée $R = \frac{r_{L_2}}{d_{TS}}$ et paramétrée par $\alpha = \frac{M_T}{M_S}$. Une fois la fonction F et la valeur de α définies, la fonction *brentq* de la bibliothèque *scipy.optimize* de Python permet de résoudre numériquement l'équation $F(R, \alpha) = 0$:

```
# Résolution numérique de l'équation F(R,alpha) = 0 dans l'intervalle [Rmin,Rmax]
solution = brentq(lambda R: F(R,alpha) , Rmin, Rmax)
```

Q 30. Proposer une procédure préalable à mettre en œuvre pour déterminer un jeu de valeurs adaptées des bornes R_{min} et R_{max} de l'intervalle dans lequel rechercher la solution. La réponse à cette question ne nécessite pas l'écriture d'un code Python, ni de connaître l'équation à résoudre.

Q 31. La résolution numérique conduit à la valeur $R = 0,009$. En déduire la valeur de la distance qui sépare la Terre du point L_2 .

Pour étudier la stabilité de l'équilibre en L_2 , on envisage un « petit » déplacement du télescope JWST qui, à un instant t , se situe alors en un point M , voisin de L_2 (voir figure 8). Les coordonnées du point M sont définies ainsi à tout instant t :

$$\overline{SM} = (d_{TS} + r_{L_2} + \varepsilon_x(t))\vec{e}_x + \varepsilon_y(t)\vec{e}_y + \varepsilon_z(t)\vec{e}_z, \quad (\text{III.1})$$

où $|\varepsilon_x(t)|$, $|\varepsilon_y(t)|$ et $|\varepsilon_z(t)|$ sont négligeables devant la distance r_{L_2} . On conduit l'étude du mouvement du télescope JWST au voisinage du point L_2 dans le référentiel \mathcal{R} . On admet que les coordonnées $\varepsilon_x(t)$, $\varepsilon_y(t)$ et $\varepsilon_z(t)$ vérifient le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_x(t) &= 2\omega\dot{\varepsilon}_y(t) + 9\omega^2\varepsilon_x(t) \\ \ddot{\varepsilon}_y(t) &= -2\omega\dot{\varepsilon}_x(t) - 3\omega^2\varepsilon_y(t) \\ \ddot{\varepsilon}_z(t) &= -4\omega^2\varepsilon_z(t) \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Q 32. Rappeler la loi fondamentale de la physique qui permet d'aboutir au système différentiel ci-dessus, ainsi que les précautions à prendre dans son écriture.

Q 33. Vérifier que les termes $2\omega\dot{\varepsilon}_y(t)$ et $-2\omega\dot{\varepsilon}_x(t)$ proviennent des projections respectives sur les axes (Sx) et (Sy) de la force d'inertie de Coriolis.

Q 34. Expliquer pourquoi on peut se limiter aux mouvements dans le plan (Sxy) si l'on souhaite étudier la stabilité de l'équilibre au point de Lagrange L_2 .

Q 35. On cherche des solutions, en utilisant la notation complexe, sous la forme : $\underline{\varepsilon}_x(t) = \underline{A}_x e^{pt}$ et $\underline{\varepsilon}_y(t) = \underline{A}_y e^{pt}$, où $p \in \mathbb{C}$. Déterminer le système des deux équations vérifiées par les amplitudes complexes \underline{A}_x et \underline{A}_y .

Q 36. En déduire les valeurs acceptables de p . Conclure quant à la stabilité de l'équilibre au point de Lagrange L_2 dans le référentiel \mathcal{R} .

Q 37. Estimer la valeur de la durée à partir de laquelle il convient de repositionner le télescope au voisinage du point L_2 .

Q 38. Donner au moins un argument qui justifie que le télescope JWST ait été placé au point L_2 .

Données

Constante de gravitation universelle	\mathcal{G}	$6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$
Célérité la lumière dans le vide	c	$299792458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380649 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
Année-lumière	1al	$9,46 \times 10^{15} \text{ m}$
Parsec	1pc	$3,26\text{al} = 3,08 \times 10^{16} \text{ m}$
Distance Terre-Soleil	d_{TS}	$1,50 \times 10^8 \text{ km}$
Masse du Soleil	M_S	$2,010 \times 10^{30} \text{ kg}$
Masse de la Terre	M_T	$5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
Minute d'arc	1'	$1/60^\circ$

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

- – 1. On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = \frac{1}{T_e}$.

- – 2. Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = \frac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

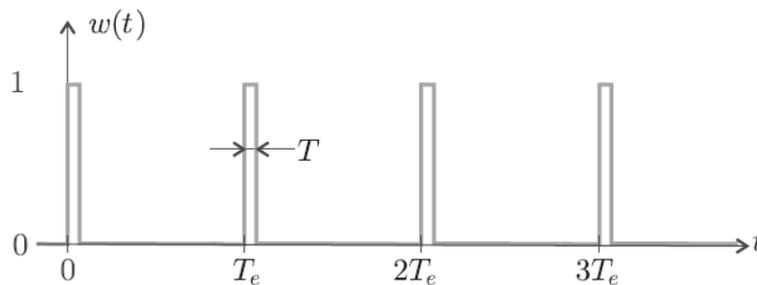


FIGURE 1 – Signal d'échantillonnage.

- – 3. Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t).$$

Représenter, par analogie avec la question 1, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \frac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

- – 4. En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».

- – 5. On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale f_{\max} . Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{\max} et f_e .

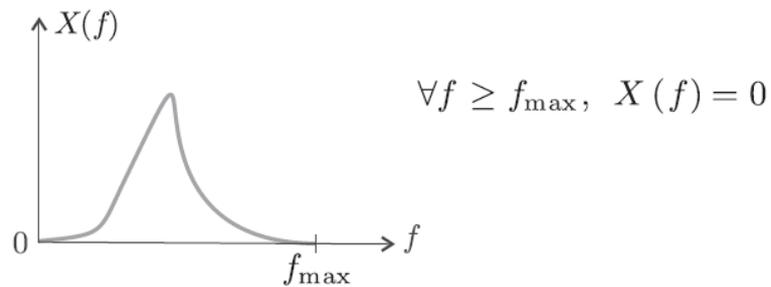


FIGURE 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

- – 6. Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.