

Sources du champ électromagnétique

Sommaire

I	Passer d'une description microscopique à une description macroscopique	2
I.1	Mouvement désordonné des porteurs de charge à l'échelle microscopique	2
I.2	Trois échelles de description de la matière	2
I.3	Distribution de charges	3
I.4	Courant électrique	4
II	Équation de conservation de la charge	5
II.1	Équation locale de conservation de la charge à une dimension	6
II.2	Généralisation	6
II.3	Interprétation des termes de l'équation locale	6
II.4	Cas particulier du régime stationnaire	7
III	Force de Lorentz	7
IV	Conducteurs ohmiques	7
IV.1	Loi d'Ohm locale : loi phénoménologique	7
IV.2	Analogies avec les autres phénomènes de transport	8
IV.3	Modèle de Drüde (1900)	8
IV.4	Loi d'Ohm intégrale	11
IV.5	Effet Hall	11
IV.6	Puissance cédée aux porteurs de charge et effet Joule	12
	Exercices	14

Questions de cours

- Établir l'expression générale du courant électrique en fonction du vecteur densité de courant électrique.
- Établir l'équation locale de conservation de la charge à une dimension cartésienne. Donner sans démonstration l'équation locale dans le cas général.
- Montrer en régime stationnaire que le flux du vecteur densité de courant volumique est nul à travers une surface fermée. Expliciter les conséquences associées.
- Déterminer l'expression de la conductivité électrique dans le cadre du modèle de Drüde. Citer un ordre de grandeur en régime stationnaire.
- Déterminer l'expression de la résistance électrique d'un conducteur cylindrique avec un courant axial.
- Déterminer l'expression de la puissance volumique cédée aux porteurs de charges mobiles et interpréter.



Prise de notes : En électronique, il est courant d'utiliser des dipôles comme des résistances, des diodes ou des transistors pour créer des circuits électriques. Quelle est la structure interne de ces composants électriques ? Et même, comment prédire la structure de nouveaux composants électriques avec des propriétés innovantes (pour simuler un réseau de neurones par exemple) ? Il faut pour cela s'intéresser aux constituants microscopiques de la matière qui transportent la charge électrique : les électrons. En modélisant la manière microscopique dont ils se déplacent, nous en déduisons des propriétés macroscopiques de la matière. Ce domaine de la physique s'appelle la matière condensée, et ce chapitre en est une introduction dans le cadre de la physique classique (et non quantique).

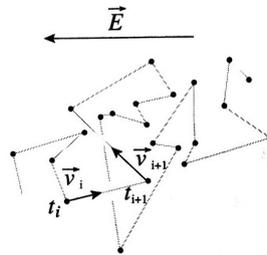
Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Distinguer l'origine (et donc le cadre de validité) d'une équation de conservation (de la charge) et d'une équation phénoménologique (loi d'Ohm).
2. Identifier les fortes analogies du transport de charges électriques avec les autres phénomènes de transport (diffusion de particules et diffusion thermique).

I Passer d'une description microscopique à une description macroscopique

I.1 Mouvement désordonné des porteurs de charge à l'échelle microscopique

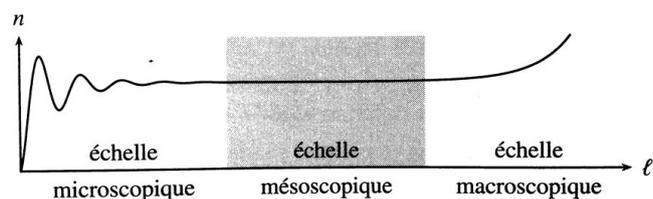
À l'échelle microscopique, les porteurs de charge subissent un mouvement désordonné, du fait de l'agitation thermique (et surtout, du fait de propriétés quantiques leur interdisant une vitesse nulle). Par exemple, dans un métal, si l'on suppose le modèle de Drude valable (cf. plus loin dans le cours), les électrons libres ont une trajectoire rectiligne, puis subissent une collision avec les cations fixes, puis ont à nouveau une trajectoire rectiligne dans une nouvelle direction aléatoire, puis subissent une collision, etc.



En absence de champ électrique extérieur $\vec{E} = \vec{0}$, la position moyenne des électrons ne varie pas. Sous l'effet d'un champ électrique extérieur $\vec{E} \neq \vec{0}$, du fait de la force électrique $\vec{F}_{el} = -e\vec{E}$, la position moyenne d'un électron individuel varie. C'est ce lent mouvement moyen de l'ensemble des électrons libres qui est à l'origine du courant électrique.

I.2 Trois échelles de description de la matière

La modélisation effectuée dans ce chapitre repose sur les mêmes hypothèses d'existence d'une échelle mésoscopique que pour les chapitres T1 et T2 de diffusion : on fait une modélisation de milieux continus.



- ★ Échelle microscopique : moyenner les grandeurs microscopiques n'a ici pas d'intérêt à cause des fluctuations spatiales et temporelles importantes.
- ★ Échelle macroscopique : fluctuation spatiale si le milieu est inhomogène (cas étudié dans ce chapitre)

Taille caractéristique de l'échelle mésoscopique

L'échelle mésoscopique est une échelle de taille caractéristique ℓ intermédiaire entre l'échelle microscopique (rayon d'un électron R et libre parcours moyen $l.p.m$) et l'échelle macroscopique (taille L du milieu étudié) :

$$R, l.p.m \ll \ell \ll L$$

En guise d'ordre de grandeur pour le cuivre, on a :

- rayon classique d'un électron $R \sim 10^{-15}$ m
- libre parcours moyen d'un électron libre $l.p.m. \sim 10^{-8}$ m
- taille d'observation macroscopique $L \sim 1$ mm

I.3 Distribution de charges

a Distribution volumique

Densité volumique de charges

On définit la densité volumique de charge au point M comme :

$$\star \quad \rho(M) = \frac{\delta Q}{d\tau}$$

avec δQ la petite quantité de charge contenue dans le volume $d\tau$ autour de M . Elle s'exprime en $C m^{-3}$

La charge totale contenue dans le volume \mathcal{V} est alors :

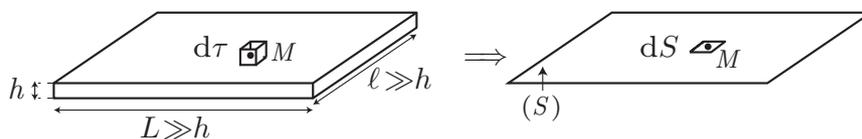
$$Q = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(M) d\tau$$

et si ρ est uniforme, $Q = \rho V$.

Il existe un lien entre la densité volumique de charges ρ et la densité volumique de particules chargées n . Pour un seul type de porteur de charge de charge q :

$$\rho = n q$$

b Distribution surfacique



Parfois, les charges sont réparties dans un volume dont l'une des dimensions est bien plus petite que les deux autres. On définit alors une densité surfacique de charge $\sigma(M)$:

$$\sigma(M) = \frac{\delta Q(M)}{dS}$$

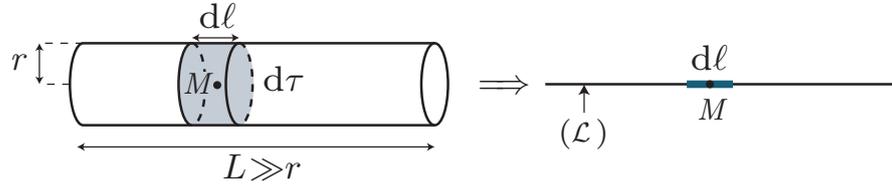
s'exprimant en $C m^{-2}$, avec δQ la charge contenue dans dS autour de M . La charge totale portée par (S) vaut alors :

$$Q = \iint_{(S)} \sigma(M) dS$$



Cette description n'est valable que si l'observateur ne se place pas trop près de cette surface.

c Distribution linéique



Lorsque les charges sont localisées au voisinage d'une courbe (\mathcal{L}) , c'est-à-dire réparties dans un volume dont une dimension est très grande par rapport aux autres, on introduit une densité linéique de charge $\lambda(M)$:

$$\lambda(M) = \frac{\delta Q(M)}{d\ell} \quad (\text{I.1})$$

où δQ est la charge comprise dans l'élément de longueur $d\ell$ autour de M . La charge dans toute la courbe est :

$$Q = \int_{(\mathcal{L})} \lambda(M) d\ell \quad (\text{I.2})$$

Là encore, ce n'est valable que si l'observateur ne se place pas trop près de la distribution de charges.

I.4 Courant électrique

a Intensité du courant électrique

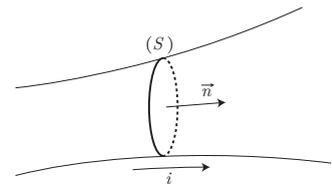
Dans la partie I.1, nous avons établi, avec un modèle microscopique que :

Le courant électrique est un déplacement ordonné de particules chargées.

Par définition, l'intensité du courant électrique à travers une surface (S) orientée s'écrit :

$$i = \frac{\delta Q}{dt} \quad (\text{I.3})$$

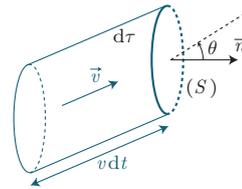
où δQ est la charge traversant algébriquement (S) pendant dt .



★ Il s'agit tout simplement d'un *débit de charge* à travers la surface (S) .

b Vecteur densité de courant électrique

Prenons le cas général de porteurs de charge de charge q , se déplaçant à la vitesse moyenne \vec{v} et traversant une surface élémentaire $d\vec{S} = dS\vec{n}$. On note δi l'intensité du courant traversant dS pendant dt .



$$d\tau = hdS = dSvdt \cos\theta = d\vec{S} \cdot \vec{v} dt$$

$$\text{donc } \delta^2 N = n d\tau = n \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$$

On en déduit la charge $\delta^2 Q$ traversant dS pendant dt :

$$\delta^2 Q = q \delta N = nq \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$$

★

donc le courant s'exprime simplement par :

$$\delta i = \frac{\delta^2 Q}{dt} = nq \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

avec $\vec{j} = nq\vec{v}$ le *vecteur densité de courant volumique*. Pour obtenir le courant à travers une surface quelconque, on découpe en surfaces élémentaires (on trouve δi), puis on somme :

$$i = \iint_{(S)} \delta i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

i est donc le flux de \vec{j} .

Vecteur densité de courant volumique

Le vecteur densité de courant volumique est défini par :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \rho\vec{v} \quad (\text{I.4})$$

où n est la densité volumique de porteurs de charge mobile, q la charge des porteurs, $\rho = nq$ la densité volumique de charges mobiles et \vec{v} la vitesse d'ensemble des porteurs. Il s'exprime en A m^{-2} . L'intensité du courant électrique à travers une surface S orientée s'exprime comme le flux de \vec{j} :

$$i = \iint_{(S)} \delta i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (\text{I.5})$$

Exercice : Déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse d'ensemble des électrons libres pour un fil de cuivre de section $S = 1 \text{ mm}^2$, parcouru par un fort courant de $I = 1 \text{ A}$ et de densité volumique d'électrons libres $n = 8.4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

★

$$v = \frac{I}{nqS} = 7.4 \times 10^{-5} \text{ m s}^{-1} = 27 \text{ cm h}^{-1}$$

Retenir que $v \ll v^*$

Remarque : Dans le cas où coexistent plusieurs types de porteurs de charge, $\vec{j} = \sum \rho_k \vec{v}_k$. Par exemple pour de l'eau salée contenant des ions Na^+ et Cl^- ,

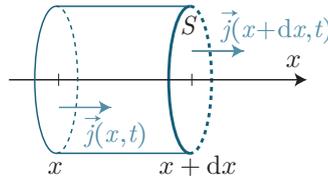
$$\vec{j} = n(\text{Na}^+)e\vec{v}(\text{Na}^+) + n(\text{Cl}^-)(-e)\vec{v}(\text{Cl}^-) \quad (\text{I.6})$$

II Équation de conservation de la charge

La charge électrique est une grandeur conservative : si un système est isolé, sa charge électrique totale se conserve au cours du temps. Cette propriété impose des relations entre la charge et les courants traduites mathématiquement par l'équation de conservation de la charge entre ρ et \vec{j} (équation locale).

II.1 Équation locale de conservation de la charge à une dimension

On considère une situation unidimensionnelle selon l'axe (Ox) où ρ et \vec{j} ne dépendent que de x et t .



i) **Modélisation** $\rho(x,t)$ et $\vec{j} = j(x)\vec{e}_x$ par invariance selon \vec{e}_y et \vec{e}_z .

On effectue un bilan de charges entre t et $t + dt$ dans un cylindre de section S , situé entre les abscisses x et $x + dx$.

ii) **Variation temporelle** : la charge Q de ce volume s'exprime via $Q(t) = \rho(x,t)Sdx$ (à l'ordre 1 en dx). Ainsi sa variation pendant dt vaut :

$$d^2Q = Q(t + dt) - Q(t) = (\rho(x,t + dt) - \rho(x,t))Sdx = \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_x dt S dx$$

à l'ordre 1 en dt

iii) **Échange avec l'extérieur** : du fait des courants $i(x,t)$ (entrant) et $i(x + dx,t)$ (sortant) (pas de courant traversant la surface latérale), on peut exprimer les charges entrant et sortant du système :

★

$$\delta Q_{entrant}(x) = i(x,t)dt = \left(\iint \vec{j}(x,t) \cdot \vec{dS} \right) dt = \vec{j}(x,t) \cdot \vec{S} dt = j(x,t)Sdt$$

$$\delta Q_{sortant}(x + dx) = i(x + dx,t)dt = j(x + dx,t)Sdt$$

Donc la charge totale échangée entre le système et l'extérieur pendant dt vaut :

$$\delta^2 Q_{ech} = \delta Q_{entrant} - \delta Q_{sortant} = (j(x,t) - j(x + dx,t))Sdt = - \left. \frac{\partial j}{\partial x} \right|_t dx S dt$$

iv) **Bilan de charges** Pour traduire la conservation de la charge :

$$d^2Q = \delta^2 Q_{ech} \iff \left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_x dt S dx = - \left. \frac{\partial j}{\partial x} \right|_t dx S dt \iff \boxed{\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_x + \left. \frac{\partial j}{\partial x} \right|_t = 0} \quad (\text{II.1})$$

II.2 Généralisation

On admet :

Équation locale de conservation de la charge

Dans le cas général, l'équation locale de conservation de la charge reliant la densité volumique de charge $\rho(M,t)$ et le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M,t)$ s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0}$$

II.3 Interprétation des termes de l'équation locale

★

- $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ est relié à la variation temporelle de la charge à l'intérieur d'un volume élémentaire
- $\text{div } \vec{j}$ est relié au courant sortant de la surface fermée délimitant le volume élémentaire, et est donc relié aux échanges spatiaux de charges

II.4 Cas particulier du régime stationnaire

En régime stationnaire, les champs étudiés ne dépendent pas du temps.

- On peut alors écrire plus simplement les bilans globaux de charges. En effet, la charge à l'intérieur d'un volume élémentaire fixe est constant au cours du temps : $d^2Q = 0$. Donc : $\delta^2 Q_{\text{ech}} = 0 \iff i_{\text{entrant}} = i_{\text{sortant}}$.
- ★ En régime stationnaire : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Donc, l'équation locale de conservation implique : $\text{div}(\vec{j}) = 0$. On dit que \vec{j} est à flux conservatif, i.e. le flux de \vec{j} est conservé le long d'un tube de courant.

On peut alors en déduire une propriété admise en première année en électrocinétique :

L'intensité est la même tout le long d'une branche, en régime stationnaire.

Cela permet également de justifier la loi des nœuds en considérant plusieurs tubes de courant qui arrivent vers la même zone de l'espace.

III Force de Lorentz

Pour rappel, la force de Lorentz est reliée à l'interaction électromagnétique. Pour une particule de charge q de vitesse \vec{v} dans un référentiel (\mathcal{R}), placée dans le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dans ce même référentiel, la force subie par la particule est :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (\text{III.1})$$

- Dans le cas d'une modélisation volumique, on peut réécrire cette expression :

★
$$\vec{F} = \rho d\tau \vec{E} + \rho d\tau \vec{v} \wedge \vec{B} = (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) d\tau$$

On définit donc une force volumique de Lorentz :

$$\vec{f}_v(M,t) = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \rho(M,t)\vec{E}(M,t) + \vec{j}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t) \quad (\text{III.2})$$

- Dans le cas d'une modélisation linéique, souvent réalisée lors de l'étude d'un circuit électrique, on peut exprimer $d\vec{F}$ sur une portion de longueur $d\ell$ du circuit :
Schéma identique à la modélisation linéique du début.

★
$$d\vec{F} = \iint_{(S)} \vec{f}_v(M,t) d\tau = \lambda(M,t)\vec{E}(M,t) + \iint_{(S)} \vec{j}(M,t) dS d\ell \wedge \vec{B}(M,t)$$

$$d\vec{F} = \lambda(M,t)\vec{E}(M,t) + i(M,t)d\vec{\ell} \wedge \vec{B}(M,t)$$

faisant apparaître la force de Laplace.

IV Conducteurs ohmiques

Pour aller plus loin, on doit réaliser un modèle précisant l'origine de \vec{j} .

IV.1 Loi d'Ohm locale : loi phénoménologique

Dans la plupart des conducteurs, tant que la fréquence est suffisamment faible (typiquement $f \ll 10^{14}$ Hz dans les métaux), on a un lien direct entre la cause du courant électrique, à savoir le champ électrique \vec{E} , et sa conséquence \vec{j} :

Loi d'Ohm locale

Si la fréquence du champ électrique $f \ll 10^{14}$ Hz, le vecteur densité de courant volumique $\vec{j} = nq\vec{v}$ est proportionnel au champ électrique appliqué dans le conducteur :

★

$$\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$$

avec γ_0 la conductivité électrique (basse fréquence) s'exprimant en S m^{-1} . Elle est parfois notée σ_0 . Un ordre de grandeur à connaître : $\gamma_0(\text{Cu}) = 6 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}$ à 300 K

Remarque : Rappelons que le siemens est l'inverse de l'ohm : $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$.

Remarque : Citons d'autres ordres de grandeur :

- conducteurs : $\gamma_0 \sim 10^7 \text{ S m}^{-1}$, eau salée à 0.1 mol L^{-1} $\gamma_0 = 6 \times 10^{-2} \text{ S m}^{-1}$, eau pure $\gamma_0 = 10^{-6} \text{ S m}^{-1}$;
- isolants : verre $\gamma_0 = 10^{-17} \text{ S m}^{-1}$, polystyrène $\gamma_0 = 10^{-20} \text{ S m}^{-1}$.



Cette loi n'a pas du tout la même validité que la loi de conservation de la charge ! La loi de conservation de la charge est toujours valable, quel que soit le matériau considéré. La loi d'Ohm locale est une relation constitutive de certains matériaux, qui a été déterminée expérimentalement et qui n'est valable que dans certaines conditions.

IV.2 Analogies avec les autres phénomènes de transport

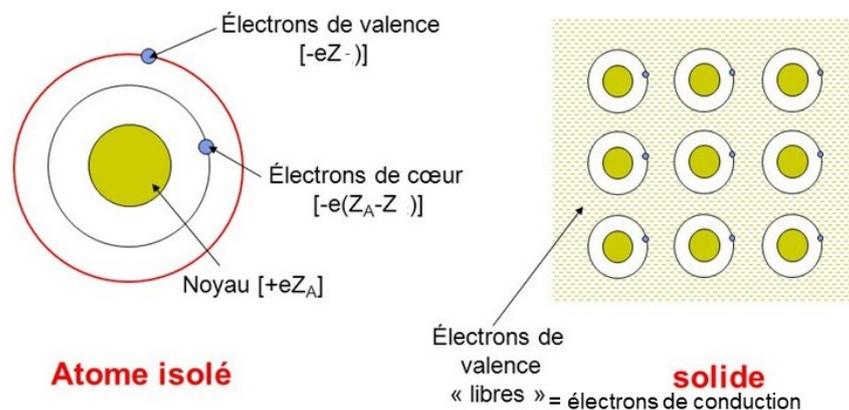
On peut effectuer une analogie avec le transport de particules et le transfert thermique par conduction, qui développent le même type de formalisme :

	Diffusion de particules	Conduction thermique	Conduction électrique
Cause : gradient de ..	densité particulaire n	température T	potentiel électrique V
Loi locale	$\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$	$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$
Débit	.. de particules $\Phi_N = \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S}$... d'énergie $\Phi = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$... de charges $I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$
Conductivité	D	λ	γ
Équation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_N = \alpha$	$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = p_v$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$
Équation de diffusion sans terme source	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$	$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$.

IV.3 Modèle de Drüde (1900)

a Hypothèses

Drüde propose un modèle microscopique (très) simple pour décrire un métal et obtenir un lien entre \vec{j} et \vec{E} . Pour cela, il s'inspire de la théorie cinétique des gaz, bien connue à l'époque.



1. Les noyaux et le cortège des électrons de cœur sont fixes dans le référentiel du métal. Ils

constituent donc une structure fixe d'ions positifs aux nœuds d'un réseau cristallin. Certains électrons de valence peu reliés aux noyaux sont, eux, modélisés par un gaz d'électrons, libres de se déplacer autour de ces cations. Dans le cas d'un solide, ces électrons sont appelés électrons de conduction.

2. On néglige toute interaction entre électrons de conduction : les électrons sont dits indépendants.
3. On néglige toute interaction électrostatique entre les ions du réseau et les électrons de conduction : les électrons sont dits libres.
4. Les seules interactions subies par les électrons de conduction sont des collisions avec les ions fixes. Ces collisions sont instantanées et la direction de la vitesse à leur issue est aléatoire.
5. Les électrons de conduction sont en équilibre thermique avec le réseau.
6. Le temps moyen entre deux collisions est noté τ et est indépendant de la position et de la vitesse de l'électron considéré.

Sans action extérieure, les hypothèses de ce modèle conduisent à $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$. Nous allons donc étudier ce modèle dans le cas où un champ \vec{E} extérieur uniforme est appliqué au métal. Ce champ \vec{E} sera considéré comme oscillant à la pulsation ω : $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$.

b Modélisation

L'approche la plus courante consiste à considérer que les collisions entre les électrons et les ions du réseau peuvent se modéliser comme une force de frottements fluides moyenne $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ avec m la masse d'un électron.

On applique le PFD à un électron, dans le référentiel du réseau cristallin supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E}$$

On se place alors en RSF : $\vec{v} = V_m \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_x$. On passe en notation complexe :

$$\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \underline{\vec{v}} = V_m e^{j(\omega t + \varphi)} \vec{e}_x = \underline{V}_m e^{j\omega t}$$

avec \underline{V}_m l'amplitude complexe.

L'équation différentielle devient :

$$\star \quad m j \omega \underline{\vec{v}} = -\frac{m}{\tau} \underline{\vec{v}} - e \underline{\vec{E}} \iff \underline{\vec{v}} = \frac{-\frac{e\tau}{m} \underline{\vec{E}}}{1 + j\omega\tau} = -\frac{\mu}{1 + j\omega\tau} \underline{\vec{E}}$$

où $\mu > 0$ est appelée la *mobilité*. Puis le vecteur densité de courant volumique s'écrit :

$$\underline{\vec{j}} = n(-e) \underline{\vec{v}} = \frac{ne^2\tau}{m} \underline{\vec{E}} = \underline{\gamma} \underline{\vec{E}}$$

avec la conductivité électrique complexe du métal $\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau}$ avec $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$.

La conductivité électrique complexe $\underline{\gamma}$ s'interprète comme une fonction de transfert reliant la conséquence ($\underline{\vec{j}}$) à sa cause ($\underline{\vec{E}}$) en RSF.



Dans le raisonnement précédent, on a appliqué le principe fondamental de la dynamique à un électron, qui est une particule microscopique. On devrait plutôt l'appliquer à un volume mésoscopique d'électrons, ce qui revient à appliquer ce raisonnement à un "électron moyen". La vitesse dans le calcul précédent est alors bien une vitesse de mouvement d'ensemble (et non une vitesse d'agitation microscopique).

c Conséquences

Équivalent basse fréquence de la conductivité complexe

A BF, i.e. si $\omega \ll \frac{1}{\tau}$, alors $\underline{\gamma} \simeq \gamma_0 \in \mathbb{R}$.

★ On en déduit alors que $\underline{j} = \gamma_0 \underline{E} \Rightarrow \vec{j} = \text{Re}(\underline{j}) = \gamma_0 \vec{E}$

Les champs \vec{j} et \vec{E} sont proportionnels : on retrouve la loi d'Ohm locale.

Équivalent haute fréquence de la conductivité complexe

A HF, i.e. si $\omega \gg \frac{1}{\tau}$, alors $\underline{\gamma} \simeq \frac{-j\gamma_0}{\omega\tau} \in i\mathbb{R}$.

Donc,

★ $\underline{j} = \frac{\gamma_0}{\omega\tau} e^{-j\pi/2} E_0 e^{j\omega t} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j} = \frac{\gamma_0}{\omega\tau} E_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \vec{e}_x$

\vec{j} et \vec{E} sont en quadrature de phase, et l'amplitude de \vec{j} est largement diminuée par rapport au cas BF.

Cas de la pulsation de coupure $\omega = \frac{1}{\tau}$

A $\omega = \frac{1}{\tau}$, on a : $\underline{j} = \frac{\gamma_0}{1+j} \underline{E}$.

Exercice : Donner alors l'expression du vecteur densité de courant $\vec{j} = j(t)\vec{e}_x$ (réel) en fonction de l'expression du champ électrique $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\vec{e}_x$.

On cherche l'amplitude de $j(t)$:

$$|j| = \frac{E_0 \gamma_0}{\sqrt{2}}$$

★ On cherche la phase de $j(t)$:

$$\arg(j) = \omega t - \arctan(1) = \omega t - \frac{\pi}{4}$$

Donc : $\vec{j} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{2}} E_0 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4}) \vec{e}_x$

Ainsi, $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ se comporte comme une pulsation de coupure. Cherchons à en donner un ordre de grandeur.

Ordre de grandeur du temps de relaxation τ pour le cuivre à 300 K :

- Calculer la densité volumique d'électrons de conduction n dans le cuivre. Pour cela, on supposera que chaque atome de cuivre donne un électron de conduction. On donne le rayon atomique du cuivre dans le métal (appelé rayon métallique) : $r_a = 140$ pm.

Le volume occupé par électron s'écrit :

$$\frac{V}{N} = \frac{4}{3} \pi r_a^3$$

★

Or,

$$n = \frac{N}{V} \Rightarrow n = \frac{3}{4\pi r_a^3} = 8.7 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

- Dédire alors du modèle de Drüde un ordre de grandeur de τ . On donne la masse d'un électron $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg.

★

$$\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \iff \tau = \frac{m\gamma_0}{ne^2} = 10^{-14} \text{ s}$$

Cohérent avec l'odg donné dans la loi d'Ohm locale.

d Limites du modèle de Drüde

Prise de notes succincte (pas au BO en PC) : Commençons par un calcul d'ordre de grandeur pour comprendre en quoi la modélisation des électrons de conduction par un gaz "classique" est osée.

Ordre de grandeur : Estimer la densité volumique de particules n_g dans un gaz usuel dans les conditions normales de température et de pression (CNTP), soit $T = 300$ K et $P = 1$ bar.

Hypothèse du GP :

$$\star \quad n_g = \frac{N}{V} = \frac{nN_A}{V} = \frac{PN_A}{RT} = \frac{P}{k_B T} = 2 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

avec $k_B = \frac{R}{N_A}$ la constante de Boltzmann.

★ Ainsi, Drüde réalise un modèle où les électrons sont libres et indépendants, alors même que la densité volumique d'électrons de conduction est 1000 fois plus grande que dans un gaz classique et que les interactions électrostatiques jouent forcément un rôle important...

Par conséquent, ce modèle présente plusieurs limites :

1. Aujourd'hui, si l'échantillon a été préparé soigneusement (sans impureté) et à basse température, les physiciens peuvent atteindre des l.p.m. de l'ordre du cm ! Donc, les électrons ne font pas que "rebondir" sur les ions du réseau : un autre processus est en réalité à l'origine du temps de relaxation.
2. La densité volumique d'électrons de conduction à choisir dans le modèle de Drüde n'est pas claire. En particulier, pourquoi seul un électron de chaque atome de cuivre servirait à la conduction ? Pour un isolant, doit-on choisir $n = 0$ alors même que cet isolant peut posséder des électrons de valence ?
3. Comment modéliser, en premier lieu, l'interaction entre les électrons de conduction et les ions du réseau ?

Seule une théorie quantique de la matière condensée fournit un modèle satisfaisant de description de la conduction dans les métaux. On montre alors qu'en choisissant les "bonnes" valeurs de τ , n et m , le modèle de Drüde est équivalent au modèle quantique pour les métaux. Cela explique les si bons résultats obtenus par Drüde à son époque.

IV.4 Loi d'Ohm intégrale

On cherche à établir la loi d'Ohm usuelle, à savoir la relation $U = RI$ en convention récepteur, ainsi que l'expression de R pour un conducteur cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe

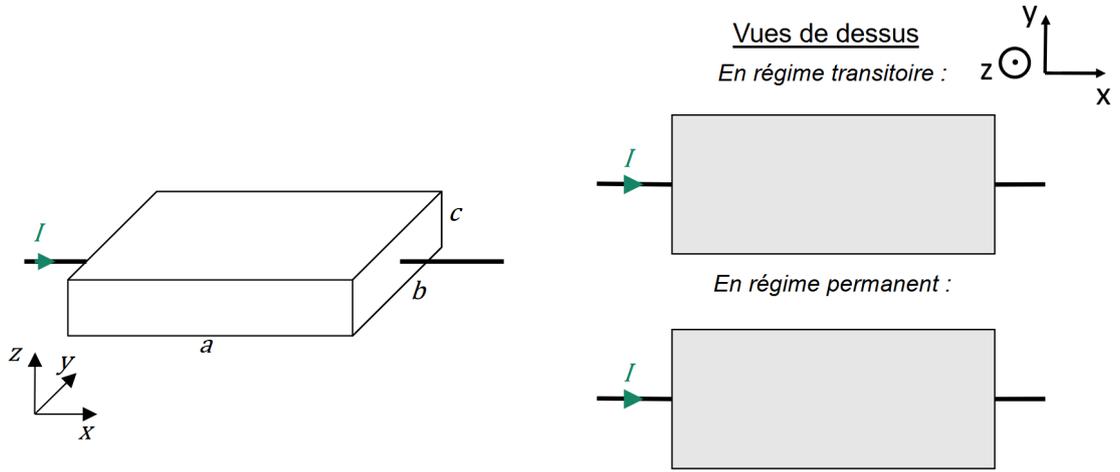
★ Voir feuille scannée

Remarque : Remarquons que $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\text{grad}} V$, c'est-à-dire que le sens du déplacement des charges électrique est celui des potentiels décroissants : le courant va du "+" au "-".

IV.5 Effet Hall

On étudie une sonde à effet Hall, qui est un instrument couramment utilisé pour mesurer des champs magnétiques allant de 0.1 mT à 10 T. L'objectif de cette partie est de comprendre le principe de fonctionnement de cette sonde, en supposant que le matériau constitutif est un métal (c'est en réalité un semi-conducteur).

Considérons un conducteur ohmique de forme parallélépipédique, de dimensions a , b et c . Ce conducteur est parcouru par un courant I stationnaire dans le sens (Ox) (dont l'origine est un champ électrique $\vec{E}_{\text{ext}} = E_x \vec{e}_x$). Il est également soumis à un champ magnétique extérieur stationnaire et uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$.



★ Durant un régime transitoire, des charges s'accumulent sur les faces opposées du conducteur. Cela aboutit à la présence d'un champ électrique, appelé champ de Hall, tel que : $\vec{E}_H = -E_H \vec{e}_y$. Une situation d'équilibre se crée alors et en régime permanent, les charges ne se déplacent que selon \vec{e}_x : $\vec{v} = v \vec{e}_x$.

On peut alors appliquer le PFD à un "électron moyen" dans le référentiel du conducteur ohmique supposé galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{\vec{v}}{\tau} - e \vec{E}_{\text{ext}} - e \vec{E}_H - e \vec{v} \wedge \vec{B}$$

En projection selon \vec{e}_y , on obtient en régime permanent :

$$0 = eE_H + evB \iff E_H = -vB$$

On peut alors faire apparaître le vecteur densité de courant électrique $\vec{j} = j \vec{e}_x$:

$$j = -env \Rightarrow E_H = \frac{j}{en} B$$

La quantité $R_H = -\frac{1}{en}$ est appelée la constante de Hall du matériau. On a donc $E_H = -R_H j B$.

Exercice : Le champ de Hall \vec{E}_H est à l'origine d'une tension de Hall U_H . La représenter sur le schéma et calculer U_H en fonction des dimensions du conducteur, de B et du courant I traversant le conducteur.

Le champ de Hall étant uniforme : $U_H = bE_H$. Donc :

★

$$U_H = -R_H B b \times \frac{I}{bc} = -R_H \frac{I}{c} B$$

Ordre de grandeur : Pour un champ magnétique intense $B = 1 \text{ T}$, un courant électrique intense $I = 1 \text{ A}$ et un conducteur de cuivre de hauteur $c = 1 \text{ mm}$, on a : $U_H \sim 10^{-7} \text{ V}$.

Cette tension n'est pas mesurable en pratique : c'est la raison pour laquelle on n'utilise pas des métaux mais des semi-conducteurs pour réaliser des sondes à effet Hall.

IV.6 Puissance cédée aux porteurs de charge et effet Joule

Les porteurs de charge mobiles, mis en mouvement par le champ électrique, reçoivent une puissance associée à la force électrique : $P_{elec} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$. Cette puissance reçue permet d'augmenter leur énergie cinétique, phénomène mis à profit dans les canons à électrons et accélérateurs de particules.

Dans le cas de conducteurs ohmiques, cependant, le champ électrique fournit de l'énergie en régime permanent qui compense les pertes dues aux forces de friction : $\frac{dE_c}{dt} = P_{elec} + P_{frotts} = 0$. On peut calculer la puissance volumique reçue par les porteurs de charge mobiles à partir de la force de Lorentz volumique :

$$\delta P = (\vec{j}_{\text{lorentz}, \text{vol}} d\tau) \cdot \vec{v} = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \implies p_v = \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (\text{IV.1})$$

Puissance volumique cédée aux porteurs en régime stationnaire

La puissance volumique cédée aux électrons libres d'un conducteur de conductivité statique γ_0 et transformée en chaleur par effet Joule s'écrit en régime stationnaire :

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma_0} \quad (\text{IV.2})$$

exprimé en W m^{-3} .

Intégrée sur le volume du conducteur, $P = \vec{j} \cdot \vec{E} \mathcal{V} = jES\ell = \frac{IU}{S} S\ell = UI = RI^2$. Cette puissance est transmise par les chocs aux ions du réseau cristallin, dont l'énergie interne (agitation thermique) augmente, et la température du conducteur augmente (sauf si on est en régime permanent thermique), impliquant un transfert thermique vers l'extérieur.

Exercices

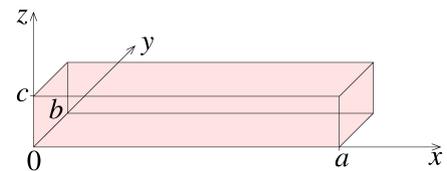
Savoir-faire exigibles du BO	Exercice
Exprimer la densité volumique de charge et le vecteur densité de courant en fonction de la vitesse moyenne des porteurs de charge, de leur charge et de leur densité volumique. Relier l'intensité du courant et le flux du vecteur densité de courant.	2, 4, 5 et 6
Établir l'équation traduisant la conservation de la charge dans le seul cas d'un problème unidimensionnel en géométrie cartésienne. Citer et utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque utilisant l'opérateur divergence, son expression étant fournie.	Cours
Exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant en régime stationnaire ; relier cette propriété à la loi des noeuds de l'électrocinétique.	4
Établir l'expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique, l'action de l'agitation thermique et des défauts du réseau étant décrite par une force de frottement fluide linéaire. Discuter de l'influence de la fréquence sur la conductivité électrique.	5
Établir l'expression de la résistance d'une portion de conducteur filiforme.	3 et 4
Interpréter qualitativement l'effet Hall dans une géométrie parallélépipédique.	5
Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique.	6

Ex. 1 Distribution volumique, distribution linéique

On considère le parallélépipède chargé ci-contre, de côtés a , b et c et de densité volumique de charge

$$\rho(x,y,z) = \rho_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi z}{c}$$

- Déterminer la charge totale Q du parallélépipède.
- On modélise le parallélépipède par une ligne d'axe (Ox), déterminer la densité linéique de charge λ .



Correction de l'exercice 1

- Découpons le volume en éléments infinitésimaux de volume $d\tau = dx dy dz$. La charge totale se calcule *via* la densité volumique de charge :

$$Q = \iiint_{(V)} \rho(x,y,z) d\tau = \rho_0 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \int_0^b \sin \frac{\pi y}{b} dy \int_0^c \sin \frac{\pi z}{c} dz \quad (\text{Ex.1})$$

soit tous calculs faits :

$$Q = \frac{2\rho_0}{\pi^2} abc \quad (\text{Ex.2})$$

- On a vu que la densité linéique de charge se mettait sous la forme $\lambda(x) = \frac{\delta Q(x)}{dx}$ (particularisé ici à l'axe (Ox)). Il suffit donc d'intégrer uniquement selon y et z (hors de question de dériver Q qui est une constante) :

$$\lambda(x) = \iint_{(S)} \rho(x,y,z) dy dz = \frac{4\rho_0 bc}{\pi^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (\text{Ex.3})$$

Ex. 2 Un peu de chimie (acide-base) : conductivité d'un électrolyte

La mobilité μ d'un porteur de charge est définie par la relation $\vec{v} = \mu \vec{E}$ où \vec{v} est la vitesse moyenne du porteur et \vec{E} est le champ électrique dans le matériau. Soit m la masse et q la charge des porteurs, n leur densité volumique (nombre de porteurs par m^3).

- Établir la relation liant la conductivité σ à la mobilité et faisant intervenir les autres grandeurs définies plus haut.
- Montrer que d'après la relation obtenue, la conductivité est toujours positive.
- Généraliser cette relation au cas de plusieurs types de porteurs caractérisés par (q_i, n_i, μ_i) .
- Application à l'eau pure : quels sont ses porteurs ? Quelles sont leurs concentrations molaires ? Leurs densités volumiques ? Calculer la conductivité de l'eau pure.

5. Application à une solution d'acide chlorhydrique de concentration 0.1 mol L^{-1} . Calculer la concentration de tous les ions puis la conductivité de la solution. Y a-t-il un ion qui joue un rôle prépondérant ?

Données : Mobilités en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-1}$: H_3O^+ : $3,75 \cdot 10^{-7}$, HO^- : $-2,12 \cdot 10^{-7}$, Cl^- : $-0,82 \cdot 10^{-7}$. Nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Correction de l'exercice 2

1. Avec $\vec{j} = \sigma \vec{E} = nq\vec{v} = nq\mu\vec{E}$, on identifie $\sigma = nq\mu$.
2. Comme μ est du même signe que q (le déplacement d'une charge positive est dans le sens de \vec{E} , et dans le sens opposé pour une charge négative), $q\mu > 0$, et $n > 0$. Donc $\sigma > 0$.
3. On peut généraliser : $\vec{j} = \sigma \vec{E} = (n_1q_1\vec{v}_1 + n_2q_2\vec{v}_2 + \dots)$ conduisant à $\sigma = \sum_i n_iq_i\mu_i$.
4. Dans l'eau pure, les seuls porteurs sont les ions HO^- et H_3O^+ . Pour rappel, la réaction d'auto-protolyse de l'eau a toujours lieu :



de constante de réaction (à connaître) $K_e = 10^{-pK_e} = 10^{-14}$.

Si on a de l'eau pure, elle est de pH neutre, donc $pH = 7$ et $[\text{HO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] = 1.00 \times 10^{-7} \text{ mol L}^{-1}$.

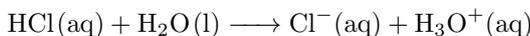
Leur densité volumique est reliée à la concentration molaire (que l'on convertit en mol m^{-3}). On convertit ensuite le nombre de mole en nombre d'éléments :

$$n(\text{H}_3\text{O}^+) = n(\text{HO}^-) = \mathcal{N}_A \times [\text{HO}^-] = 6.02 \times 10^{19} \text{ m}^{-3} \quad (\text{Ex.4})$$

Ainsi en appliquant le résultat de la question 3. :

$$\sigma = n(\text{H}_3\text{O}^+)e(\mu(\text{H}_3\text{O}^+) - \mu(\text{HO}^-)) = 5.65 \times 10^{-6} \text{ S m}^{-1} \quad (\text{Ex.5})$$

5. L'acide chlorhydrique est un **acide fort** qui se dissocie totalement en ions H_3O^+ et Cl^- , de concentration identique 0.1 mol L^{-1} . On rappelle :



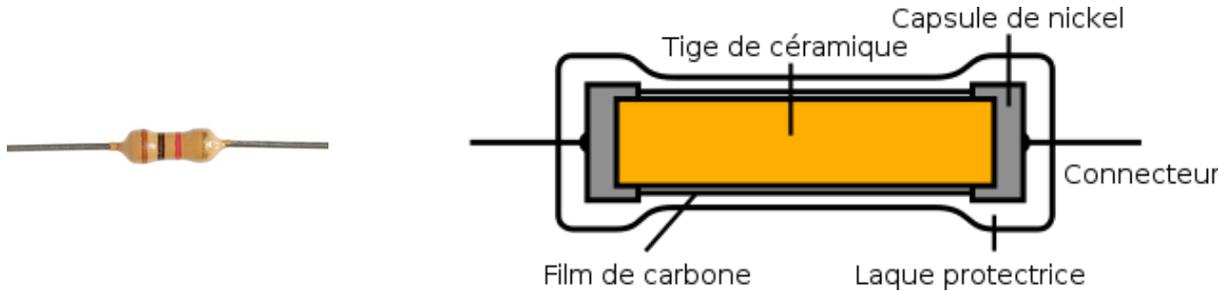
Puis l'autoprotolyse de l'eau a aussi lieu, mais, au vu de la forte concentration en H_3O^+ , celle-ci ne modifie pas $[\text{H}_3\text{O}^+]$, et donc le pH . Ainsi, on considère que le pH vaut 1, et donc $[\text{HO}^-] = 10^{-14+pH} = 10^{-13} \text{ mol L}^{-1}$. En effectuant le même calcul, on trouve :

$$\sigma = \mathcal{N}_A e ([\text{H}_3\text{O}^+] \mu(\text{H}_3\text{O}^+) - [\text{HO}^-] \mu(\text{HO}^-) - [\text{Cl}^-] \mu(\text{Cl}^-)) = 4.40 \text{ S m}^{-1} \quad (\text{Ex.6})$$

avec la plus grande contribution revenant à l'ion H_3O^+ , $\mathcal{N}_A e [\text{H}_3\text{O}^+] \mu(\text{H}_3\text{O}^+) = 3.6 \text{ S m}^{-1}$.

Ex. 3 Ordre de grandeur de résistances

1. Estimer l'ordre de grandeur de la résistance d'un câble tel que ceux utilisés en TP d'électricité.
2. On considère une résistance commune de petite puissance constituée d'un film de carbone de résistivité $3.5 \times 10^{-5} \Omega \text{m}$ entourant un cylindre de céramique (isolant électrique). La conductivité du nickel est du même ordre de grandeur que celle du cuivre (4 fois plus petite), celle de la céramique est négligeable. Donner l'ordre de grandeur de l'épaisseur du film de carbone d'un résistor de $1 \text{ k}\Omega$.



CARBON FILM RESISTOR

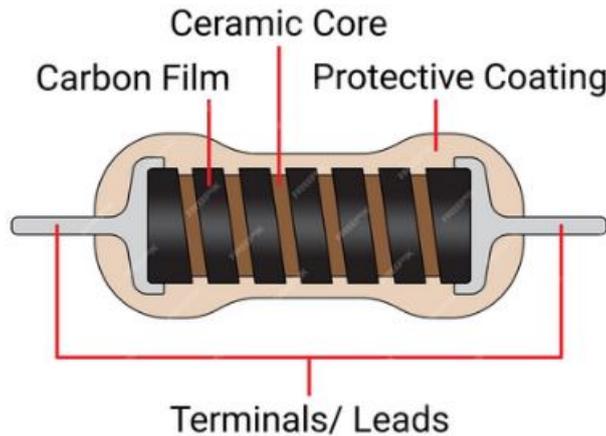


Figure 1: Le film carbone n'est pas, contrairement à ce que pourrait laisser penser l'image, discontinu : il recouvre toute la tige de céramique.

3. Tracer l'allure des lignes de courant électrique dans la résistance.

Correction de l'exercice 3

1. Il s'agit de câbles de cuivre fins, de section d'environ 1 mm^2 , et de longueur typique $\ell = 1 \text{ m}$. En appliquant la formule obtenue pour la résistance électrique :

$$R = \frac{\ell}{\gamma S} \sim 10^{-2} \Omega \quad (\text{Ex.7})$$

ce qui est bien négligeable devant les résistances que l'on ajoute dans nos circuits (ouf !).

2. Comme le nickel est du même ordg de conductivité que le cuivre, la résistance des deux capsules aux extrémités est négligeable devant la valeur de la résistance globale. Ainsi on identifie $R(C) = R$. D'autre part, en notant le diamètre $d \sim 2 \text{ mm}$ et la longueur du cylindre (creusé) de carbone $\ell \simeq 1 \text{ cm}$, on peut chercher l'épaisseur e du film en utilisant toujours la même formule que précédemment. En effet, on applique bien une différence de potentiel entre les deux sections droites du cylindre creux, et non entre la face intérieure et extérieure (ce qui aurait donné une géométrie de courant différente). D'où :

$$R = \frac{\ell}{\gamma(C) \times (\pi d \times e)} \quad (\text{Ex.8})$$

avec la surface latérale approximée à $S = 2\pi \times \text{rayon} \times e$ (périmètre \times épaisseur), vu que l'épaisseur est très

certainement petite devant le rayon (on est donc dans le fameux cas du manchon cylindrique). Donc :

$$e = \frac{\ell}{\gamma(C)\pi dR} \sim 6 \times 10^{-8} \text{ m} \quad (\text{Ex.9})$$

proche de $0.1 \mu\text{m}$. C'est très petit, même si l'épaisseur est bien plus importante que la taille des atomes de carbone. L'épaisseur obtenue est cohérente avec les données des fabricants de résistances.

3. Les lignes de courant se situent dans le film de carbone et sont colinéaires à l'axe du cylindre.

Rque : relativement peu chères, pas trop imprécises, ces résistances à film de carbone sont souvent remplacées par des résistances à couche d'oxyde métallique, produisant moins de bruit (pour les circuits à faibles signaux). Le film a alors une structure plutôt hélicoïdale et s'enroule autour de la base en céramique (la couche métallique est gravée au laser).

Ex. 4 Résistance d'un conducteur sphérique

On s'intéresse à la machine de Wimshurst, dans laquelle des charges s'accablent dans deux boules métalliques, jusqu'à un point tel que le champ électrique généré par ces charges suffit à rendre l'air ambiant partiellement conducteur : un éclair est alors observable.

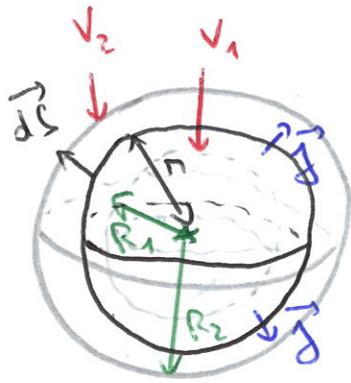


Dans ce chapitre, notre question est alors d'estimer la résistance des boules métalliques. On considère une boule métallique que l'on va modéliser comme une boule creuse, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 . On applique une différence de potentiel entre les deux surfaces de cette boule creuse. Déterminer la résistance d'une boule métallique creuse en régime stationnaire. Application numérique pour une boule de cuivre avec $R_1 = 0.5 \text{ cm}$ et $R_2 = 2 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 4

Voir feuille scannée ci-après

RÉSISTANCE D'UN CONDUCTEUR SPHÉRIQUE



On se place en coordonnées sphériques.

1) Modélisation:

(Si $V_1 > V_2$, \vec{j} va de R_1 à R_2)

$$\vec{j} = j(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r.$$

↑ ↑
invariance par rotations d'angle θ et φ

2) Calcul de I:

En régime stationnaire, \vec{j} est à flux conservatif.

Conservation du flux de \vec{j} à travers une surface sphérique de rayon $r \in [R_1, R_2]$:

$$\begin{aligned} I = \oint_{(r)} \vec{j} \cdot d\vec{S} &= \int j(r) \times 4\pi r^2 \\ &= \epsilon_0 E(r) 4\pi r^2 \quad \text{avec } \vec{E} = E(r) \vec{e}_r. \end{aligned}$$

loi d'ohm
locale

3) Calcul de U: $\Delta \vec{E}$ non uniforme!!!

$$U = V_1 - V_2 \quad \leftarrow \text{convent } ^\circ \text{ récepteur}$$

$$= \int_2^1 dV$$

$$= \int_2^1 \vec{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{r}$$

$$= - \int_{R_2}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{\epsilon_0 4\pi r^2} dr = \frac{I}{4\pi \epsilon_0} \times \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

4) Bilan:

$$R = \frac{U}{I}$$

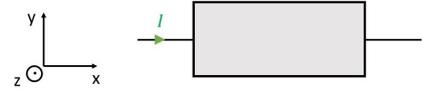
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) > 0 \quad (\text{cohérent !})$$

A.N: Cuivre: $\epsilon_0 = 6 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$

$\Rightarrow R = 2 \cdot 10^{-7} \Omega$ \rightarrow logique que ce soit faible: c'est une petite boule en cuivre!

Ex. 5 Effet Hall

On reprend la géométrie du conducteur parallélépipédique. On soumet ce métal à un champ électrique extérieur stationnaire et uniforme $\vec{E}_{\text{ext}} = E_x \vec{e}_x$ et à un champ magnétique extérieur stationnaire et uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$. En régime permanent, la conduction électrique dans le métal ne se fait que selon \vec{e}_x .



1. On considère que l'action des collisions entre les électrons et les cations fixes du métal se modélise comme une force moyenne $\vec{f} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$ agissant sur les électrons de masse m et de vitesse \vec{v} . Donner la dimension de τ par analyse dimensionnelle et préciser sa signification physique.
2. Expliquer qualitativement pourquoi il existe, en régime permanent, un champ électrique de Hall $\vec{E}_H = -E_H \vec{e}_y$ dans le matériau.
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à un volume mésoscopique d'électrons sous forme vectorielle. Déterminer alors l'expression de E_H en fonction, entre autres, du vecteur densité de courant électrique j_x et du champ magnétique B .

Correction de l'exercice 5

1. Je vous rappelle juste la dimension d'une force : $[F] = MLT^{-2}$. On trouve alors que τ est homogène à un temps : il représente la durée caractéristique entre deux collisions entre un électron et un cation fixe du réseau (dans l'interprétation de Drüde).
2. Cf cours.
3. En s'inspirant du modèle de Drüde, on écrit le PDF à "un électron libre moyen" (= à un volume mésoscopique d'électrons libres) dans le réf des ions fixes du réseau, en régime permanent :

$$\vec{0} = -\frac{m\vec{v}}{\tau} - e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Les charges ne se déplacent que selon \vec{e}_x , donc \vec{v} selon \vec{e}_x . En projection sur l'axe y , on obtient donc :

$$eE_y - ev_x B = 0 \Rightarrow v_x = \frac{E_y}{B}$$

Donc,

$$j_x = -env_x = -\frac{enE_y}{B} = +\frac{enE_H}{B} \Rightarrow \boxed{E_H = R_H j_x B} \quad \text{avec} \quad R_H = \frac{1}{ne}$$

Validation : Si B augmente, force magnétique appliquée aux électrons plus grande, devant être compensée par un plus grand champ de Hall : OK. Même raisonnement si la vitesse $v_x = \left| \frac{j_x}{ne} \right|$ des porteurs de charge augmente.

Ex. 6 Température dans un conducteur électrique

On souhaite transporter l'électricité sur une ligne à très haute tension dans laquelle on fait passer un courant de l'ordre de $I = 250 \text{ A}$ dans un conducteur de cuivre.

Déterminer si le conducteur en cuivre fond.

Formulaire

Loi de Newton du transfert conducto-convectif entre un solide et un fluide

$$P = hS\Delta T$$

où P est la puissance thermique échangée, S la surface de contact solide-fluide et ΔT la différence de température entre la surface du solide et celle du fluide très loin du solide. Pour le coefficient de transfert thermique conducto-convectif h , on prendra ici $h \simeq 100 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$.

Données

Données sur le cuivre

- Diamètre du fil de cuivre $d = 1.0 \text{ cm}$
- Conductivité thermique $\lambda = 4 \times 10^2 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Résistivité électrique $\rho = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$
- Température de fusion $T_f = 1356 \text{ K}$

Correction de l'exercice 6

Appropriation

On réalise un schéma du conducteur cylindrique de cuivre, supposé rectiligne d'axe (Oz). On se place en coordonnées cylindriques. Sur une tranche dz du conducteur, le transfert thermique est purement radial avec invariance selon θ et z : $\vec{j}_Q = j_Q(r)\vec{e}_r$.

On cherche alors la température au sein du conducteur de cuivre, et on comparera la température maximale atteinte à la température de fusion T_f .

Stratégie

Attention : Certes, le problème est stationnaire. Mais, il ne faut pas utiliser de résistance thermique, car il y a un terme source ici ! Donc,

$$\mu \frac{\partial u}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_Q = p_V \Rightarrow \text{div } \vec{j}_Q = p_V \neq 0$$

le flux thermique ne se conserve pas. A retenir : la notion de résistance thermique est inutilisable s'il y a un terme source.

1. Etablir l'équation de diffusion thermique avec terme source.
2. La résoudre avec des constantes d'intégration.
3. Déterminer les constantes d'intégration avec les conditions aux limites.
4. Comparer la température maximale à la température de fusion.

Résolution

1. On applique le 1er principe à une couronne cylindrique d'épaisseur dr et de longueur dz pendant dt :

$$\begin{aligned} dU & \underbrace{=}_{\text{car stationnaire}} 0 = \delta Q = \delta Q_{\text{entrant}}(r) - \delta Q_{\text{sortant}}(r + dr) + \delta Q_{\text{Joule}} \\ 0 & = \underbrace{j_Q(r)2\pi r dz dt - j_Q(r + dr)2\pi(r + dr)dz dt + 2\pi r dr dz dt p_V}_{=-2\pi dz dr dt \frac{dj_Q(r)r}{dr}} \end{aligned}$$

avec p_V le terme de création volumique de puissance par effet Joule.

On utilise la loi d'Ohm locale et on suppose un vecteur densité de courant électrique \vec{j} uniforme :

$$p_V = \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j}^2 / \gamma = \rho \vec{j}^2 = \rho (I / (\pi R^2))^2 = \frac{16\rho I^2}{\pi^2 d^4}$$

Ainsi, on obtient :

$$\frac{dr j_Q(r)}{dr} = p_V r$$

Avec la loi de Fourier, on obtient :

$$\lambda \frac{dr}{dr} \frac{dT}{dr} = -p_V r$$

2. En intégrant, comme $p_V = \text{cste}$:

$$j_Q(r) = \frac{p_V r}{2} + \frac{A}{r}$$

avec A une constante d'intégration. Puis pour la température :

$$T(r) = -\frac{p_V r^2}{4\lambda} - \frac{A}{\lambda} \ln(r) + B$$

avec B une seconde constante d'intégration.

3. 1ère condition aux limites en $r = 0$: Pas de divergence de la température en $r = 0$: nécessairement $A = 0$
 2nde condition aux limites en $r = \frac{d}{2}$: la puissance thermique échangée entre le cuivre et l'air est reliée à la loi de Newton :

$$P = S j_Q(d/2) = hS(T(d/2) - T_0) \iff B = T_0 + \frac{p_V d}{4} \left(\frac{1}{h} + \frac{d}{4\lambda} \right)$$

avec $T_0 = 298 \text{ K}$ la température ambiante de l'air.

4. La température est maximale au centre du conducteur (cohérent) :

$$T_{\max} = B = T_0 + \frac{d}{4} \left(\frac{1}{h} + \frac{d}{4\lambda} \right) \times \frac{16\rho}{\pi^2 d^4} \times I^2 = 298 + 4.3 \text{ K} = 302 \text{ K} < T_f$$

Le fil en cuivre est très loin de fondre !

Validation

- Le courant de 250 A est très important, certes, mais cela reste un conducteur en cuivre, très peu résistif. Donc, cela semble convenable que le conducteur ne fonde pas (et le fil a tout de même un diamètre de 1 cm, ce qui n'est pas négligeable). Néanmoins, attention, on a fait le raisonnement en régime stationnaire : lors du démarrage de l'expérience, les effets convectifs ne se seront pas encore mis en place, alors que la température va très vite augmenter. Durant cette phase, la température maximale est bien plus élevée.
- Dépendances en d , h , I et ρ cohérentes avec la physique. On note une forte dépendance en le diamètre du fil.