Révisions et compléments : équations différentielles linéaires scalaires du second ordre.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On note θ la fonction nulle sur I.

1 Généralités.

Définition 1. *Une équation différentielle linéaire scalaire du second ordre, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$, est une équation (E) du type :*

$$ay'' + by' + cy = d$$

où a, b, c, $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ avec $\forall x \in I$, $a(x) \neq 0$.

- *Une solution sur I de (E) est donc une application $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ telle que :*

$$\forall x \in I,\ a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x).$$

- *L'équation (E) est dite homogène si $d = \theta$.*
- *L'équation homogène associée à (E), notée (H), (E_h) ou encore (E_0), est l'équation : $ay'' + by' + cy = \theta$.*

Proposition 1. *Soient a, b, c, $d \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. On suppose que $\forall x \in I$, $a(x) \neq 0$. Soit (E) : $ay'' + by' + cy = d$.*
1. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) associée à (E) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$.
2. Soit u une solution sur I de (E). Alors y est solution de (E) sur I si et seulement si $y - u$ est solution sur I de l'équation homogène (H) associée à (E).

On admet le théorème suivant, appelé **théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire**, dont la démonstration est hors programme :

Théorème 1. [Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire]
Soit $(a, b, c, d) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^4$ tel que $\forall x \in I$, $a(x) \neq 0$. Soient $x_0 \in I$ et $(y_0, y_0') \in \mathbb{K}^2$.
Il existe une **unique solution** *$y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de (E) : $ay'' + by' + cy = d$ sur I telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$.*

Ce théorème permet de préciser la structure de l'ensemble des solutions d'une équation homogène :

Proposition 2. *Soit $(a, b, c, d) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^4$ tel que $\forall x \in I$, $a(x) \neq 0$. Soit (E) : $ay'' + by' + cy = \theta$. L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène : $ay'' + by' + cy = \theta$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$* **de dimension 2**.

Démonstration. Notons $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des solutions sur I de (E). Soit $x_0 \in I$.
Considérons l'application $T : \begin{array}{ccc} S & \to & \mathbb{K}^2 \\ y & \mapsto & (y(x_0), y'(x_0)) \end{array}$. On vérifie que T est linéaire. De plus T est une bijection de S sur $\mathbb{K}^2$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Autrement dit, T est un isomorphisme de S sur $\mathbb{K}^2$. Un résultat d'algèbre linéaire permet alors de conclure que $\dim_{\mathbb{K}} S = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^2 = 2$. $\square$

Exemple 1. *Résoudre sur $]0, +\infty[$ (E) : $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ en cherchant des solutions du type $x \mapsto x^\alpha$.*

Définition 2. *Soit $(a, b, c, d) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^4$ tel que $\forall x \in I$, $a(x) \neq 0$. Soit (E) l'équation homogène : $ay'' + by' + cy = \theta$. On appelle système fondamental de solutions toute base (y_1, y_2) de $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel de dimension 2 des solutions sur I de (E).*

Exemple 2. *Vérifier que (ch, sh) est un système fondamental de solutions de (E) : $y'' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.*

La proposition 2 permet de préciser le résultat 2. de la proposition 1

Proposition 3. *Les hypothèses et les notations sont celles de la proposition 1.*
Soit u une solution (particulière) sur I de (E). Soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène (H) associée à (E). Alors y est solution sur I de (E) si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $y = u + \alpha y_1 + \beta y_2$.

Proposition 4. [Principe de superposition] *Les hypothèses et les notations sont celles de la proposition 1.*
Supposons $d = d_1 + d_2$ avec $(d_1, d_2) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^2$. Si u_1 (resp. u_2) est une solution de (E_1) : $ay'' + by' + cy = d_1$ (resp. de (E_2) : $ay'' + by' + cy = d_2$) alors $u_1 + u_2$ est une solution de (E).

2 Rappels sur les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients constants

Proposition 5. `[Solutions à valeurs complexes de (E)]`
Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ avec $a\neq 0$. Soit (E) : $ay''+by'+cy=0$.
L'équation caractéristique est l'équation (ec) d'inconnue $r\in\mathbb{C}$: $ar^2+br+c=0$. Alors :
- *si (ec) admet deux racines distinctes $(r_1,r_2)\in\mathbb{C}^2$, $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que*
$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}.$$
- *si (ec) admet une racine double r_0, $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ tel que*
$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=(\alpha x+\beta)e^{r_0x}.$$

Proposition 6. `[Solutions à valeurs réelles de (E)]` *Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq 0$. Soit (E) : $ay''+by'+cy=0$.*
L'équation caractéristique est l'équation (ec) d'inconnue $r\in\mathbb{R}$: $ar^2+br+c=0$. Alors :
- *si (ec) admet deux racines réelles distinctes r_1,r_2, $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que*
$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=\alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}.$$
- *si (ec) admet une racine double r_0, $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que*
$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=(\alpha x+\beta)e^{r_0x}.$$
- *si (ec) admet deux racines complexes (conjuguées) non réelles $r=u+iv$ et $\bar{r}=u-iv$, $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que*
$$\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=e^{ux}(\alpha\cos(vx)+\beta\sin(vx)).$$

3 Méthodes de résolution

3.1 Recherche d'une solution particulière dans trois cas classiques

Proposition 7. *Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ avec $a\neq 0$. Soit (E) : $ay''+by'+cy=P(x)$ où P est un polynôme.*
Si $c\neq 0$, (E) admet une solution polynomiale sur $\mathbb{R}$ de même degré que P.

Exemple 3. *Déterminer toutes les solutions $y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de (E) : $y''-2y'+y=x^2+x+1$.*

Exemple 4. *Déterminer toutes les solutions $y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de (E) : $y''+y'=x^2$.*

Remarque 1. *Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$ avec $a\neq 0$. Soit (E) : $ay''+by'+cy=P(x)e^{\alpha x}$ où P est un polynôme. On pose $y(x)=z(x)e^{\alpha x}$ et on obtient une équation différentielle à coefficients constants d'inconnue z dont le second membre est P.*

Exemple 5. *Déterminer toutes les solutions $y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de (E) : $y''-2y'+y=chx$.*

Remarque 2. *Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ avec $a\neq 0$, $P\in\mathbb{R}[X]$ et $\omega\in\mathbb{R}^*$.*
Soit (E) : $ay''+by'+cy=P(x)\cos(\omega x)$ ou $ay''+by'+cy=P(x)\sin(\omega x)$.
On peut considérer $(E_{\mathbb{C}})$: $aY''+bY'+cY=P(x)e^{i\omega x}$ d'inconnue $Y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et poser $Y(x)=Z(x)e^{i\omega x}$. Les remarques précédentes permettent de trouver une solution particulière Y de $(E_{\mathbb{C}})$ donc une solution particulière y de (E) car si Y est une solution de $(E_{\mathbb{C}})$, $\mathrm{Re}\,(Y)$ ou $\mathrm{Im}\,(Y)$ est une solution de (E).

Exemple 6. *Déterminer toutes les solutions $y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de (E) : $y''+y=xe^x\cos x$.*

3.2 Méthode de la variation d'une constante ou de Lagrange

Soient a, b, c, $d\in\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$ avec $\forall x\in I$, $a(x)\neq 0$. Soit (E) : $ay''+by'+cy=d$. On suppose que l'on connait une solution y_0 de **l'équation homogène** (H) associée à (E) : $ay''+by'+cy=0$ qui **ne s'annule pas sur** I, c'est-à-dire telle que $\forall x \in I$, $y_0(x) \neq 0$.

Soit $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$. Posons, pour tout $x \in I$, $z(x) = \dfrac{y(x)}{y_0(x)}$. Alors $z \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ car z est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Comme $y = y_0 z$, on a : $y' = y_0' z + y_0 z'$ et $y'' = y_0'' z + 2y_0' z' + y_0 z''$. Par conséquent, y est solution de (E) sur I ssi :

$$a(y_0'' z + 2y_0' z' + y_0 z'') + b(y_0' z + y_0 z') + c(y_0 z) = d$$

ou encore comme $ay_1'' + by_1' + cy_1 = \theta$ ssi pour tout $x \in I$

$$a(x)y_0(x)z''(x) + (2a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x))z'(x) = d(x).$$

Cette dernière équation différentielle est d'ordre 1 en l'inconnue $u = z'$. Il nous reste à déterminer par un calcul de primitives z' puis z d'où y.

Un exercice corrigé. *Résoudre sur* $I =]-1, +\infty[$ (E) : $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = xe^{-x}$.

• On vérifie facilement que $x \mapsto e^x$ est une solution de l'équation homogène associée (E_0).

Utilisons la méthode de la variation d'une constante (ou de Lagrange).
Soit $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Posons pour tout $x \in I$, $y(x) = z(x)e^x$.
L'application $z : x \mapsto y(x)e^{-x} \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et on vérifie que y est solution de (E) sur I ssi

$$\forall x \in I,\ (1+x)z''(x) + 2xz'(x) = xe^{-2x}.$$

Posons $u = z'$ et notons $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle : $(1+x)u'(x) + 2xu(x) = xe^{-2x}$.

En remarquant que $\dfrac{2x}{1+x} = 2 - \dfrac{2}{1+x}$, on obtient que la solution générale de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$ est de la forme $x \mapsto c(x+1)^2 e^{-2x}$, $c \in \mathbb{R}$. On utilise ensuite la méthode de la variation de la constante pour déterminer toutes les solutions u de $\mathcal{E}$. A cet effet, posons $u(x) = c(x)(x+1)^2 e^{-2x}$ où $c \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Un calcul de dérivées montre que u est solution de $\mathcal{E}$ sur I ssi $\forall x \in I$, $c'(x) = \dfrac{x}{(x+1)^3}$.

Comme $\dfrac{x}{(x+1)^3} = \dfrac{(x+1)-1}{(x+1)^3} = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ c(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + k.$$

Ainsi u est solution de $(\mathcal{E})$ sur I ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \Big(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + k\Big)(x+1)^2 e^{-2x} \\ &= -\frac{(x+1)}{2}e^{-2x} + k(x+1)^2 e^{-2x} \end{aligned}$$

Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $z'(x) = -\frac{(x+1)}{2}e^{-2x} + k(x+1)^2 e^{-2x}$.
Soient P une primitive de $x \mapsto -\frac{(x+1)}{2}e^{-2x}$ et Q une primitive Q de $x \mapsto (x+1)^2 e^{-2x}$.
Alors il existe $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I$, $z(x) = P(x) + kQ(x) + l$ et finalement y est solution de (E) sur I ssi il existe $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I$, $y(x) = z(x)e^x = P(x)e^x + kQ(x)e^x + le^x$.
En primitivant par parties, on obtient qu'une primitive P de $x \mapsto -\frac{(x+1)}{2}e^{-2x}$ est $x \mapsto \frac{(2x+3)}{4}e^{-2x}$.
En primitivant deux fois par parties, on obtient qu'une primitive Q de $x \mapsto (x+1)^2 e^{-2x}$ est $x \mapsto -\frac{(2x^2+6x+5)}{4}e^{-2x}$.
Par conséquent, y est solution de (E) sur I si et seulement si il existe $(k', l) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I$,

$$y(x) = \frac{(2x+3)}{4}e^{-x} + \underbrace{k'(2x^2+6x+5)e^{-x} + le^x}_{solutions\ de\ (E_0)}$$

après avoir posé $k' = -\frac{k}{4}$.

Exemple 7. *Résoudre sur* $I =]-1, +\infty[$ (E) : $(1+x)y'' - y' - xy = e^{-x}$.
On utilise la méthode de la variation d'une constante avec $y_0 : x \mapsto e^x$ *solution (ne s'annulant jamais !) de l'équation homogène (H) associée à (E) pour obtenir finalement que* y *est solution sur* I *de (E) ssi il existe* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\forall x \in I$, $y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \alpha(2x+3)e^{-x} + \beta e^x$.

3.3 Recherche de solutions DSE(0)

On peut être conduit à chercher (quand il y en a !) les solutions y de (E) sommes de séries entières, c'est-à-dire de la forme : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in]-R, R[$. On détermine alors a_n et R.

Un exercice corrigé. *Soit l'équation différentielle (E) :* $xy'' + y' + y = 0$.
Déterminer les solutions de (E) développables en série entière en 0.
Vérifier que, parmi ces solutions, il en existe une seule, notée h*, telle que* $h(0) = 1$.

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$. Notons $I =]-R, R[$ et posons, pour tout $x \in I$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. D'après le cours sur les séries entières, y est indéfiniment dérivable terme à terme sur I. On a donc, en particulier,

$$\forall x \in I,\ y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

La fonction y est alors solution sur I de (E) ssi

$$\forall x \in I,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

ou encore ssi

$$\forall x \in I,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

car le terme d'indice $n = 1$ de la première somme ci-dessus est nul.
Donc, en regroupant les deux premières sommes ci-dessus, y est solution sur I de (E) ssi

$$\forall x \in I,\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Effectuons dans la première somme ci-dessus le changement d'indice $p = n - 1$ puis le changement de notation $n = p$. On obtient alors que y est solution sur I de (E) ssi

$$\forall x \in I,\ \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+1)^2 a_{n+1} + a_n] x^n = 0. \tag{1}$$

Par unicité du DSE(0) de la fonction nulle sur I, y est donc solution sur I de (E) ssi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)^2 a_{n+1} + a_n = 0. \tag{2}$$

Un raisonnement par récurrence élémentaire montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} a_0$ et donc que

$$\forall x \in I,\ y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n. \tag{3}$$

Le critère de D'Alembert montre que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Les coefficients a_n de la somme de série entière de l'égalité (3) sont les solutions de (2). Donc les solutions y DSE(0) de (E) sont bien celles données en (3) et ces solutions y sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après (3), $y(0) = a_0$ et l'unique solution h de (E) sur $\mathbb{R}$, DSE(0) sur $\mathbb{R}$ et telle que $h(0) = 1$ est : $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$.

Remarque. L'ensemble des solutions DSE(0) sur $\mathbb{R}$ de (E) est donc l'ensemble des fonctions proportionnelles (colinéaires) à h. Cet ensemble $Vect(h)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 1 (la droite vectorielle dirigée par h).