Révisions : équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On note θ la fonction nulle sur I.

1 Généralités.

Définition 1 *Une équation différentielle linéaire scalaire (EDLS) du premier ordre, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$, est une équation (E) du type :*

$$ay' + by = c$$

où $(a, b, c) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^3$ avec $\forall x \in I,\ a(x) \neq 0$.

• *Une solution sur I de (E) est donc une application $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ telle que :*

$$\forall x \in I,\ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x).$$

• *Si y est une solution de (E) sur I, la courbe $\Gamma = \{(x, y(x))/x \in I\}$ est appelée "courbe intégrale" de (E) sur I.*

• *L'équation (E) est dite homogène si $c = \theta$.*

• *L'équation homogène associée à (E) (ou équation sans second membre) est l'équation différentielle notée (H), (E_h) ou encore (E_0) :*

$$ay' + by = \theta.$$

Proposition 1 *Soit $(a, b, c) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^3$. On suppose que $\forall x \in I,\ a(x) \neq 0$. Soit (E) : $ay' + by = c$.*

1. *L'ensemble des solutions sur I de l'équation homogène (H) associée à (E) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.*

2. *Soit u une solution sur I de (E). Alors y est solution de (E) sur I si et seulement si $y - u$ est solution sur I de l'équation homogène (H) associée à (E).*

2 Recherche des solutions.

Soit $(a, b, c) \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})^3$ tel que $\forall x \in I,\ a(x) \neq 0$. Soit (E) : $ay' + by = c$ et (H) : $ay' + by = \theta$.
En général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et on recherche sauf mention contraire, les solutions *réelles* de (E) sur I.

2.1 Résolution de l'équation homogène

Proposition 2 *Soit P une primitive sur I de la fonction $\dfrac{b}{a}$. Soit $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. Alors :*

$$y \text{ est solution sur } I \text{ de } (H) \text{ si et seulement si il existe } k \in \mathbb{K} \text{ tel que } \forall x \in I,\ y(x) = ke^{-P(x)}.$$

Preuve. Soit $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. La fonction y est solution de (H) sur I ssi $\forall x \in I,\ y'(x) + \dfrac{b(x)}{a(x)}y(x) = 0$, donc ssi

$$\forall x \in I,\ y'(x) + P'(x)y(x) = 0.$$

Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ e^t \neq 0$, y est donc solution de (H) sur I ssi $\forall x \in I,\ e^{P(x)}(y'(x) + P'(x)y(x)) = (e^{P(x)}y(x))' = 0$.
Par conséquent, y est solution de (E) sur I ssi la fonction $x \mapsto e^{P(x)}y(x)$ est constante sur I car I est un *intervalle.*
D'où le résultat. □

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $ay'(x) + by(x) = 0$.
Exercice 2. Résoudre sur $]0, \pi[$: $\sin(t)\, y'(t) - \cos(t)\, y(t) = 0$.
Exercice 3. Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$: $xy' + y = 0$.

Remarque 1 *L'ensemble des solutions sur I de (H) est la droite vectorielle engendrée par la fonction e^{-P}, donc un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.*

Proposition 3 `[Problème de Cauchy]` *Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. (H) admet une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$.*

Preuve. Soit P_0 l'unique primitive sur I de la fonction $\dfrac{b}{a}$ s'annulant en 0, c'est-à-dire la fonction définie sur I par :

$$P_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\, dt,\ x \in I.$$

L'unique solution y de (H) telle que $y(x_0) = y_0$ est, d'après la proposition (2), la fonction : $x \mapsto y_0 e^{-P_0(x)}$. □

Exercice 4. Déterminer $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + e^{x^2} y(x) = 0$ et $y(0) = 0$.
Exercice 5. Déterminer $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ (1 + |x|)y'(x) - y(x) = 0$ et $y(-1) = 1$.

2.2 Résolution d'une équation avec second membre

2.2.1 Utilisation d'une solution évidente

On utilise le résultat **2.** de la proposition 1.
Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' - 2xy = (1 - 2x)e^x$.
Exercice 7. Résoudre sur $]0, +\infty[$: $xy' - y = x^2$.
Exercice 8. Résoudre sur $]0, \pi[$: $\sin(t)y'(t) - \cos(t)y(t) = 1$.
Exercice 9. Résoudre sur $]0, +\infty[$: $2x^2 y'(x) + y(x) = 1$.
Dans le cas le plus fréquent où l'on ne trouve pas de «solution évidente», on utilise en général la méthode suivante :

2.2.2 Méthode de la variation de la constante

On cherche à résoudre (E) : $ay' + by = c$ où a, b, $c : I \to \mathbb{K}$ (en général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) sont continues sur I, et $\forall x \in I,\ a(x) \neq 0$.
Soit P une primitive sur I de la fonction $\dfrac{b}{a}$. On sait que les solutions de (H) sont les fonctions :

$$x \mapsto k e^{-P(x)},\ k \in \mathbb{K}. \tag{1}$$

La méthode de la variation de la constante consiste à rechercher les solutions y de (E) en posant :

$$y(x) = k(x) e^{-P(x)} \tag{2}$$

avec $k \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$. On remplace donc la constante k de (1) par une fonction k de classe $\mathcal{C}^1$.
Précisons tout d'abord que toute fonction $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ s'écrit d'une seule manière sous la forme précédente : en effet,

$$(2) \Leftrightarrow \forall x \in I,\ k(x) = y(x) e^{P(x)}$$

et $k \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Rechercher les solutions y de (E) revient donc à déterminer k définie en (2).
On a alors : $y'(x) = (k'(x) - k(x)P'(x))e^{-P(x)} = (k'(x) - k(x)\frac{b(x)}{a(x)})e^{-P(x)}$ et y est solution de (E) sur I ssi :

$$\forall x \in I,\ a(x)\big((k'(x) - k(x)\frac{b(x)}{a(x)})e^{-P(x)}\big) + b(x)k(x)e^{-P(x)} = c(x)$$

donc ssi

$$\forall x \in I,\ k'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{P(x)}.$$

Soit Q une primitive de $x \mapsto \dfrac{c(x)}{a(x)}\, e^{P(x)}$ sur I. On peut conclure que y est solution sur I de (E) ssi

$$\exists \alpha \in \mathbb{K},\ \forall x \in I,\ y(x) = k(x)e^{-P(x)} = (Q(x) + \alpha)e^{-P(x)} = Q(x)e^{-P(x)} + \alpha e^{-P(x)}.$$

Comme $u : x \mapsto Q(x)e^{-P(x)}$ est une solution particulière de (E) (obtenue pour $\alpha = 0$) et $x \mapsto \alpha e^{-P(x)}$ est la solution générale de (H), on retrouve le résultat **2.** de la Proposition 1 :
une solution de (E) est la somme d'une solution (particulière) u de (E) et d'une solution de (H).
Exercice 10. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$. *Réponse* : $y(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x) + ke^{-x},\ k \in \mathbb{R}$.
Exercice 11. Résoudre sur $]0, +\infty[$: $xy' - 2y = -\ln(x)$. *Réponse* : $y(x) = \frac{1}{2}\ln(x) + \frac{1}{4} + cx^2,\ c \in \mathbb{R}$.
Exercice 12. Résoudre sur $]0, +\infty[$: $(1 + x^2)\arctan(x)y' + y = x$. *Réponse* : $y(x) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{2\arctan(x)} + \dfrac{c}{\arctan(x)},\ c \in \mathbb{R}$.

Proposition 4 `[Problème de Cauchy]` *Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. (E) admet une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$.*

2.2.3 Cas particulier : EDLS d'ordre 1 à coefficients constants et second membre polynôme.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ (E) : $ay' + by = P(x)$ avec $a \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$, et $P \in \mathbb{K}[X]$.

On vérifie qu'il existe une unique fonction polynôme Q de même degré que P, solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi $\exists k \in \mathbb{K}$, $\forall x \in I$, $y(x) = Q(x) + ke^{-\frac{b}{a}x}$.

Exercice 13. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + y = x^3$.

2.2.4 Cas particulier : EDLS d'ordre 1 à coefficients constants et second membre polynôme-exponentielle réelle.

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ (E) : $ay' + by = P(x)e^{kx}$ avec $a \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$.

On pose : $y(x) = z(x)e^{kx}$, ce qui revient à effectuer le changement de fonction : $z(x) = y(x)e^{-kx}$.
Comme $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On vérifie que y est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ssi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $az'(x) + (b + ka)z(x) = P(x)$.
Cette dernière équation est une équation différentielle du type traité dans la la section précédente. D'où z puis y.

Exercice 14. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + y = x^2 e^x$.

2.2.5 Cas particulier : EDLS d'ordre 1 à coefficients constants et second membre polynôme-cosinus(sinus).

On cherche les solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) : $ay' + by = P(x)\cos(kx)$ (ou $P(x)\sin(kx)$) avec $(a, k) \in \mathbb{R}^{*2}$, $b \in \mathbb{R}$, et $P \in \mathbb{R}[X]$.

On peut procéder de la façon suivante : on introduit l'équation complexe associée, d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

$$(E_{\mathbb{C}}) : \; aY' + bY = P(x)e^{ikx}.$$

On remarque que si Y est solution de $(E_{\mathbb{C}})$ sur $\mathbb{R}$, alors $y = \text{Re}\,(Y)$ (ou $\text{Im}\,(Y)$) est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Donc si on connait une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$, on obtient une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$ en en prenant sa partie réelle (ou imaginaire). Il ne reste plus qu'à lui ajouter les solutions de l'équation homogène associée à (E) pour obtenir toutes les solutions de (E).
Et pour déterminer une solution particulière de $(E_{\mathbb{C}})$, on pose : $Y(x) = Z(x)e^{ikx}$. Alors $Z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et Y est solution de $(E_{\mathbb{C}})$ sur $\mathbb{R}$ ssi

$$\forall x \in \mathbb{R},\; aZ'(x) + (b + iak)Z(x) = P(x).$$

Cette dernière équation différentielle admet une unique solution polynômiale complexe Q telle que $d^0(Q) = d^0(P)$ d'après le paragraphe 2.2.3.

Exercice 15. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y' + y = x \sin x$.

2.3 Cas où la fonction a s'annule sur I.

Exemple. Résoudre sur $I =]-\pi, \pi[$ (E) : $\sin(x)y'(x) - 2\cos(x)y(x) = 0$.

L'équation (E) est homogène à coefficients continus mais la fonction $a = \sin$ s'annule en $x = 0$.

Déterminons (s'il en existe) les fonctions y *dérivables sur* I telles que $\forall x \in I$, $\sin(x)y'(x) - 2\cos(x)y(x) = 0$.
On commence par résoudre (E) sur les intervalles sur lesquels $a = \sin$ ne s'annule pas, c'est-à-dire ici sur $]-\pi, 0[$ et $]0, \pi[$.

Soit y une solution de (E) sur I. Alors y est évidemment solution sur $I_1 =]-\pi, 0[$ et sur $I_2 =]0, \pi[$.

Comme $P : x \mapsto -2\ln(|\sin x|)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{b(x)}{a(x)} = -2\dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur I_1 et sur I_2, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]-\pi, 0[,\; y(x) = \alpha \sin^2(x) \;\text{ et}\, \forall x \in]0, \pi[,\; y(x) = \beta \sin^2(x).$$

La continuité de y en 0 implique : $y(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} y(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \beta \sin^2(x) = 0$.

Les éventuelles solutions de (E) sur I sont donc les fonctions $y_{\alpha,\beta}$, dérivables sur $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$ et continues en 0, définies par :

$$\forall x \in]-\pi, 0[,\; y_{\alpha,\beta}(x) = \alpha \sin^2(x),\; \forall x \in]0, \pi[,\; y_{\alpha,\beta}(x) = \beta \sin^2(x) \;\text{et}\, y_{\alpha,\beta}(0) = 0.$$

De plus, comme $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$, $y_{\alpha,\beta}$ est dérivable en 0 avec $y'_{\alpha,\beta}(0) = 0$ car $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y_{\alpha,\beta}(x) - y_{\alpha,\beta}(0)}{x - 0} = 0$ (distinguer limite à gauche et à droite). En outre $y_{\alpha,\beta}$ est solution de (E) en $x = 0$ car $\sin(0)y'_{\alpha,\beta}(0) - 2\cos(0)y_{\alpha,\beta}(0) = 0$.

En conclusion, les solutions de (E) sur I sont les fonctions $y_{\alpha,\beta}$.

Remarque. On observera que les solutions de (E) sur I forment ici un espace vectoriel *de dimension 2* dont une base est $(y_{1,0}, y_{0,1})$.