Spé PC. Lycée Rabelais. Saint-Brieuc. Durée : 4 heures.
Samedi 12 octobre 2024.

Devoir de mathématiques en temps limité n° 2.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \sin(\pi(3+\sqrt{5})^n)$ et $s_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$.

1. Développer et simplifier s_n en utilisant la formule du binôme, et montrer que s_n est un entier naturel pair.

2. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\pi(3-\sqrt{5})^n$, puis déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 2. **1.** Soient a et b deux réels positifs. Justifier que $|\ln(1+a)-\ln(1+b)| \leq |a-b|$.

2. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \ln(1+\frac{nx^2}{1+nx}).$$

2. a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on précisera.

2. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de **1.** que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(x)-f(x)| \leq \dfrac{1}{n}$, puis justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

Exercice 3. Soit $g \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $[0,1]$ par : $f_n(x) = x^n g(x)$.

1. Déterminer la limite simple sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Prouver que si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$, alors $g(1)=0$.

3. *Un exemple.* Soit $g(x) = 1-x$, $x \in [0,1]$. Etudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. *On revient au cas général.* On suppose désormais que $g(1)=0$. Soit $M = \max\limits_{t\in[0,1]} |g'(t)|$.

4. a. Justifier que $\forall x \in [0,1]$, $|g(x)| \leq M(1-x)$.

4. b. Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ converge. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq a_n.$$

1. Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I. *Indication : utiliser le lien suite-série.*

• On note f la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la fonction f définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\forall x \in I$, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} a_k$. En déduire que $\forall x \in I$, $|f(x) - f_n(x)| \leq r_n$.

3. Justifier que f est continue sur I.

Exercice 5. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{\sin(10^{2n}x)}{10^n}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. *Calcul de* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\cos(10^{2n}\cdot\dfrac{\pi}{4})$.

3. b. Prouver que $I = 1{,}002 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6. *Les questions 1 et 2 sont indépendantes.*

1. Soit $a_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a. Montrer que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Ce^{-n}$ où C est une constante réelle à préciser.

1. b. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} a_n z^n$.

2. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n+1 \leq b_n \leq 3n^2+5$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$.

Exercice 7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$.

1. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

2. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

• On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$.

3. Prouver que f est continue sur $]0, +\infty[$.

4. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

5. Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

6. Simplifier $f(x+1) + f(x)$ pour tout $x > 0$.

7. Déduire de 5. et 6. que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Problème 1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$, $u_n(x) = \ln(n) + \dfrac{x}{n} - \ln(x+n)$.

1. Montrer que si $x > -1$, la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge.

• On note alors, pour $x > -1$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et $C = S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\dfrac{1}{n} - \ln(1 + \dfrac{1}{n}))$.

• On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > -1$, $v_n(x) = \dfrac{1}{(n+x+1)(n+x)}$.

2. a. Vérifier que si $x > -1$, la série $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{1+x}$.

2. b. Soit $a > -1$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

3. a. Soit $x > -1$. Simplifier $D(x) = S(x+1) - S(x)$.

3. b. Prouver que D est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$ et préciser $D'(x)$ si $x > -1$.

4. Soit $T(x) = e^{S(x)}$, $x > -1$. Montrer que $\forall x > -1$, $\dfrac{T(x+1)}{T(x)} = e^C (1+x)$.

On pose enfin, si $x > 0$, $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x} e^{-Cx} T(x)$.

5. a. Déterminer pour $x > 0$ une relation simple entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

5. b. Calculer $\Gamma(1)$ puis $\Gamma(p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Problème 2. *Un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.*

A. 1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de terme général : $u_n(x) = \dfrac{\cos(6^n x)}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, converge.

• On pose alors : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\cos(6^n x)}{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$.

A. 2. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

B. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ et $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

• Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On pose : $e_n = E(\dfrac{6^n}{\pi} x_0)$, où E désigne l'application partie entière.

Enfin, on note : $a_n = \dfrac{\pi}{6^n} e_n$ et $b_n = \dfrac{\pi}{6^n}(e_n + 1)$.

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq x_0 < b_n$ et que $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = x_0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Montrer que $R_n(a_n) = R_n(b_n) = \dfrac{1}{2^n}$.

2. b. Montrer que $u_n(b_n) - u_n(a_n) = (-1)^{e_n - 1} 2^{-n+1}$.

2. c. Montrer que $|S_{n-1}(b_n) - S_{n-1}(a_n)| \leq \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

2. d. En déduire que $|\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}| \geq \dfrac{3^n}{\pi} (2 - \dfrac{\pi}{2})$.

3. Démontrer que f n'est pas dérivable en x_0. *Indications : Raisonner par l'absurde en supposant f dérivable en x_0. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0 puis étudier* $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$.