Spé PC. Corrigé du devoir de mathématiques en temps limité n^o 2 (12.10.2024).

Exercice 1. *Séries numériques.*

1. En utilisant deux fois la formule du binôme, on a : $s_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(\sqrt{5})^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(-\sqrt{5})^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}(1+(-1)^k)\sqrt{5}^{\,k}$.
Or $1+(-1)^k = 2$ si k est pair et $1+(-1)^k = 0$ si k est impair ; et les entiers $k \in [\![0, n]\!]$ qui sont pairs sont les entiers $k = 2p$ avec $p \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$. Par conséquent :

$$s_n = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} 3^{n-2p} \cdot 2 \cdot 5^p = 2 \underbrace{\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} 3^{n-2p} \cdot 5^p}_{\in \mathbb{N}}$$

est bien un entier pair car la somme $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} 3^{n-2p} \cdot 5^p$ est une somme d'entiers naturels.

Autre méthode : Posons $r_1 = 3+\sqrt{5}$ et $r_2 = 3-\sqrt{5}$. Comme $r_1 + r_2 = 6$ et $r_1 r_2 = 9-5 = 4$, r_1 et r_2 sont les deux solutions (réelles) de l'équation du second degré, d'inconnue r, $r^2 - 6r + 4 = 0$. En utilisant le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on peut affirmer que la suite (s_n) vérifie la relation de récurrence linéaire : $s_{n+2} = 6s_{n+1} - 4s_n$. Or $s_0 = 2$ et $s_1 = 6$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in \mathbb{Z}$ (récurrence) et finalement $s_n \in \mathbb{N}^*$ car $s_n > 0$.

2. D'après 1. $u_n = \sin(\pi(s_n - (3-\sqrt{5})^n) = \sin(-\pi(3-\sqrt{5})^n + \pi s_n) = \sin(-\pi(3-\sqrt{5})^n) = -\sin(\pi(3-\sqrt{5})^n)$ car sin est 2π-périodique et impaire. De plus $\sin x \underset{x \to 0}{\sim} x$ et la suite géométrique $((3-\sqrt{5})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 car $3-\sqrt{5} \in]0,1[$. D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\pi(3-\sqrt{5})^n$.
Et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge par la règle de l'équivalent de signe constant (négatif ici) car la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(3-\sqrt{5})^n$ converge (de raison $3-\sqrt{5} \in]0,1[$).

Exercice 2. *Suites de fonctions.*

1. Si $a = b$, l'inégalité demandée est évidente. On peut supposer $b > a$. Alors : $\ln(1+b) - \ln(1+a) > 0$ et

$$\ln(1+b) - \ln(1+a) = \int_a^b \frac{1}{1+x}\,dx \leq b-a.$$

car $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{1+x} \leq 1$ donc $\int_a^b \frac{1}{1+x}\,dx \leq \int_a^b 1\,dx = b-a$.
Autre méthode avec l'égalité des accroissements finis (EAF) :
Comme $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \ln(1+b) - \ln(1+a) \underset{EAF}{=} (b-a)f'(c) = (b-a)\frac{1}{1+c} \leq b-a$$

car c étant positif, $\frac{1}{1+c} \leq 1$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Et pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \ln(1+x)$ car u est continue en x et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{nx^2}{1+nx} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{1+\frac{1}{nx}} = x.$$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

2. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 1. pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(x) - f(x)| = |\ln(1+\frac{nx^2}{1+nx}) - \ln(1+x)| \leq \frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n}$ car $nx \leq 1+nx$.
Autrement dit, la fonction $|f_n - f|$ est majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $\frac{1}{n}$. Par conséquent :

$$0 \leq \|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} \ (*).$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f : $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} = 0$ par $(*)$ et le théorème de la limite par encadrement.

Exercice 3. *Suites de fonctions.*

1. Pour tout $x \in [0,1[$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison x, donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. De plus, la suite $(f_n(1))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante, de constante égale à $g(1)$. Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(1) = g(1)$. La limite simple sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$, et $f(1) = g(1)$.

2. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, g est a fortiori continue sur $[0,1]$. Chaque fonction f_n est donc continue sur $[0,1]$ comme produit de deux fonctions continues, et en particulier continue (à gauche) en 1. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f, f est aussi continue (à gauche) en 1 d'après le théorème de continuité de la limite d'une suite de fonctions (CVU et continuité). On a donc : $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x)$, i.e. $g(1) = 0$ d'après **1.**

3. Dans cet exemple, $g(1)=0$. D'après **1.** la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle θ sur $[0,1]$. L'étude des variations de $f_n-\theta=f_n$ sur $[0,1]$ montre que :

$$s_n := \sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-\theta(x)| = \max_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{n}{n+1}) = \underbrace{(\frac{n}{n+1})^n}_{\leq 1}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$ car, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq s_n\leq \frac{1}{n+1}$.
La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc uniformémént sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
Remarque. On aurait pu aussi utiliser $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n}{n+1})^n = \lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^{-n} = e^{-1}$ pour justifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$.

4. a. D'après les propriétés de l'intégrale :

$$\forall x\in[0,1],\ |g(x)| = |\underbrace{g(1)}_{=0}-g(x)| = |\int_x^1 g'(t)\,dt| \leq \int_x^1 |g'(t)|\,dt \leq \int_x^1 M\,dt = M(1-x).$$

Autre rédaction utilisant l'égalité des accroissements finis : L'inégalité à prouver est une égalité si $x=1$. Soit $x\in[0,1[$. Comme g est continue sur $[x,1]$ et dérivable sur $]x,1[$, le théorème des accroissements finis donne l'existence d'(au moins) un réel $c\in]x,1[$ tel que $g(1)-g(x)=(1-x)g'(c)$. Or $|g'(c)|\leq M$, donc

$$|g(1)-g(x)| = |(1-x)g'(c)| = (1-x)|g'(c)| \leq M(1-x).$$

4. b. D'après **1.** la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle car $g(1)=0$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après **4. a** et **3.**, on a :

$$\forall x\in[0,1],\ |f_n(x)-\theta(x)| = x^n|g(x)| \leq Mx^n(1-x) \leq \frac{M}{n+1}.$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq \|f_n-\theta\|_\infty := \sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-\theta(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)| \leq \dfrac{M}{n+1}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge donc uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle car $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_\infty = 0$ par le théorème des gendarmes .
Autre rédaction possible pour prouver la CVU de (f_n) vers θ sur $[0,1]$.
Soit $\varepsilon>0$. Choisissons $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{M}{N+1}\leq\varepsilon$, c'est-à-dire tel que $N\geq\frac{M}{\varepsilon}-1$.
Remarquons qu'un tel N ne dépend que de ε ! On a alors :

$$\forall n\geq N,\ \underline{\forall x\in[0,1]},\ |f_n(x)-\theta(x)| = |f_n(x)| = x^n|g(x)| \leq \frac{M}{n+1} \leq \frac{M}{N+1} \leq \varepsilon.$$

Exercice 4. *Suites de fonctions.*
1. On demande donc de prouver que, pour tout $x\in I$, la suite $(f_n(x))$ converge :
Soit $x\in I$. Comme la série $\sum a_n$ converge, la série $\sum|f_{n+1}(x)-f_n(x)|$ converge par comparaison (de termes positifs).
Autrement dit, la série $\sum(f_{n+1}(x)-f_n(x))$ converge absolument, donc converge (par théorème).
D'où la convergence de la suite $(f_n(x))$ par le lien suite-série.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}^*$ et $x\in I$. On a : $f_{n+p}(x)-f_n(x) = \sum\limits_{k=n}^{n+p-1}(f_{k+1}(x)-f_k(x))$ (telescopage) et donc, par inégalité triangulaire :

$$|f_{n+p}(x)-f_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1}\underbrace{|f_{k+1}(x)-f_k(x)|}_{\leq a_k} \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} a_k.$$

En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente (x et n étant fixés), on obtient bien :

$$|f(x)-f_n(x)| \leq r_n$$

car $\lim\limits_{p\to+\infty} f_{n+p}(x) = f(x)$ (donc $\lim\limits_{p\to+\infty}|f_{n+p}(x)-f_n(x)| = |f(x)-f_n(x)|$) et $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{n+p-1} a_k = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k = r_n$ (un passage à la limite conservant les inégalités larges).
3. D'après 2. chaque fonction f_n-f est bornée sur I avec : $0\leq\|f_n-f\|_{\infty,I} = \sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \leq r_n$ $(*)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ car $\forall n\geq 1$, $r_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k$ (r_n est le reste d'indice $n-1$ de la série convergente $\sum\limits_{n\geq 0}a_n$).
On déduit de $(*)$ et du théorème de la limite par encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_{\infty,I} = 0$, en d'autres termes que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f.
Et comme chaque fonction f_n est, par hypothèse, continue sur I, le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions (CVU et continuité) permet de conclure que f est continue sur I.

Exercice 5. *Séries de fonctions.*

1. Il s'agit de prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de réels $\sum u_n(x)$ converge.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n(x)| = \dfrac{|\sin(10^{2n}x)|}{10^n} \leq (\dfrac{1}{10})^n$ car $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \leq 1$.

La série géométrique $\sum(\frac{1}{10})^n$, de raison $\frac{1}{10} \in]-1,1[$, étant convergente, la série $\sum|u_n(x)|$ converge donc par comparaison de termes positifs. En d'autres termes, la série $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc (par théorème) convergente.

2. D'après le théorème de continuité du chapitre série de fonctions (CVU et continuité), f est continue sur $\mathbb{R}$ car :
a) Chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$ (comme composée car sin et $x \mapsto 10^{2n}x$ sont continues sur $\mathbb{R}$),
b) La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement (donc uniformément sur $\mathbb{R}$) car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |u_n(x)| \leq (\frac{1}{10})^n$$

et la série géométrique $\sum(\frac{1}{10})^n$ converge.
Autre rédaction possible utilisant la définition de la CVN : chaque u_n est bornée sur $\mathbb{R}$ avec plus précisement

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}}|u_n(x)| = |u_n(\frac{\pi}{2\cdot 10^{2n}})| = (\frac{1}{10})^n$$

donc la série (géométrique) $\sum\|u_n\|_\infty$ converge.

3. a. Notons $c_n = \cos(10^{2n}\frac{\pi}{4})$, $n \in \mathbb{N}$. On a : $c_0 = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c_1 = \cos(25\pi) = -1$ et pour tout $n \geq 2$, $c_n = 1$: si $n = 2+p$, avec $p \in \mathbb{N}$, $\frac{10^{2n}}{4} = \frac{10^4}{4}\cdot 10^{2p} = 2\cdot 1225\cdot 10^{2p}$ est un entier pair, et si N est pair, $\cos(N\pi) = 1$.

3. b. D'après **2.** f est la somme d'une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0,\frac{\pi}{4}]$), qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0,\frac{\pi}{4}]$). Donc par théorème (intégration terme à terme), la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{\frac{\pi}{4}} u_n(x)\,dx$ converge et :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{3n}}[-\cos(10^{2n}x)]_0^{\frac{\pi}{4}}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{10^{3n}}(1-c_n) = (1-c_0) + \frac{1}{1000}(1-c_1) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{1000} = 1,002 - \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

car d'après 3. a. $\forall n \geq 2$, $1 - c_n = 0$.

Exercice 6. *Séries entières.*

1. a. Rappelons que $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n = 0$. On a donc :

$$a_n = (\frac{n+1}{n})^{-n^2} = e^{-n^2\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-n^2(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon_n)} = e^{-n}\cdot e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\varepsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{2}}e^{-n}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\varepsilon_n} = 1$. La constante C cherchée est donc $e^{\frac{1}{2}}$.

1. b. Notons $u_n(x) = a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Comme $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} Ce^{-n}$, $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} Ce^{-(n+1)}$. Pour tout x non nul, $u_n(x) \neq 0$ et :

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-1}|x|.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = e^{-1}|x|.$$

D'après la règle de D'Alembert, si $e^{-1}|x| < 1$, c'est-à-dire $|x| < e$, la série $\sum u_n(x)$ converge absolument et si $|x| > e$, la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement car $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n(x)| = +\infty$. Donc le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ est égal à e.

Variante. D'après 1. a. et une propriété du cours, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ *a le même rayon de convergence que la série entière (géométrique)* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} Ce^{-n}x^n = \sum_{n\geq 1} C(\frac{x}{e})^n$ *(égal à e).*

2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$ et $c_n = 3n^2+5$. On vérifie classiquement (en utilisant le critère de D'Alembert) que le rayon de convergence R_a de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est égal 1. De même le rayon de convergence R_c de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n x^n$ est égal à 1. Notant R_b le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n x^n$, on a, par une propriété du cours, $R_b \leq R_a$ et $R_b \geq R_c$. D'où $R_b = 1$.

Exercice 7. *Séries de fonctions.*

1. Pour tout $x > 0$, la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée ($u_n(x)$ est strictement positif si n est pair et strictement négatif si n est impair), convergente par le critère des séries alternées car la suite $(|u_n(x)|)$, c'est-à-dire la suite $(\frac{1}{\sqrt{n+x}})$, est décroissante, de limite nulle. Donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

2. Soit $x > 0$. Comme la série $\sum u_n(x)$ est une série alternée (convergente) telle que la suite $(|u_n(x)|)$ est décroissante, de limite nulle, on a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1+x}}.$$

Donc *i)* chaque fonction R_n est bornée sur $]0, +\infty[$ puisque $\forall x > 0,\ |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $(*)$ et

ii) la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ car, d'après $(*)$,

$$0 \leq \|R_n\|_\infty = \sup_{x>0} |R_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}\ (**)$$

et par l'encadrement $(**)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc uniformément sur $]0, +\infty[$.

3. Par théorème, f est continue sur $]0, +\infty[$ car chaque fonction u_n est continue sur $]0, +\infty[$ et la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ (donc sur tout segment de $]0, +\infty[$) d'après 2.

4. Posons $I =]0, +\infty[$. On constate que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, avec $\forall x \in I,\ u_n'(x) = (-1)^n((n+x)^{-\frac{1}{2}})' = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2(n+x)^{\frac{3}{2}}}$,

(ii) La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I d'après la question 1,

(iii) La série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$ (donc sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$) :

Soit $x > 0$. La série $\sum u_n'(x)$ est une série alternée (convergente) telle que la suite $(|u_n'(x)|) = (\frac{1}{2(n+x)^{\frac{3}{2}}})$ est décroissante, de limite nulle.

Notons $r_n(x)$ le reste d'indice n de cette série. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |r_n(x)| \leq |u_{n+1}'(x)| = \frac{1}{2(n+1+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc chaque fonction r_n est bornée sur $]0, +\infty[$ puisque $\forall x > 0,\ |r_n(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ $(*)$ et la suite de fonctions (r_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $]0, +\infty[$ car, d'après $(*)$,

$$0 \leq \|r_n\|_\infty = \sup_{x>0} |r_n(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)^{\frac{3}{2}}}\ (**)$$

et par $(**)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$.

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions, $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et

$$\forall x \in I,\ f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Remarque. La rédaction proposée ci-dessus en iii) peut être remplacée par :

La série $\sum u_n'$ *converge normalement (donc uniformément) sur tout segment* $[a, b] \subset]0, +\infty[$ *:*

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in [a, b],\ |u_n'(x)| \leq \frac{1}{2(n+a)^{\frac{3}{2}}} (= \alpha_n)$$

et $\sum \alpha_n$ *converge par la règle de l'équivalent positif car* $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

Autre façon de rédiger : comme $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]} = \sup\limits_{x\in[a,b]} |u_n'(x)| = \max\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{1}{2(n+x)^{\frac{3}{2}}} = |u_n'(a)| = \alpha_n$, $\sum \|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$ *converge.*

5. Soit $x > 0$. On a $f'(x) < 0$. En effet, $f'(x)$ est la somme d'une série alternée *convergente par le critère des séries alternées*. Donc, d'après une propriété du cours, le signe de $f'(x)$ est celui du premier terme $u_0'(x) = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} < 0$ de la somme $f'(x)$.

Donc f est (strictement) décroissante sur $]0, +\infty[$.

6. Soit $x > 0$. En commençant par effectuer le changement d'indice $p = n + 1$ dans la somme $f(x+1)$, on obtient :

$$f(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1+x}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p+x}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}} = -(f(x) - \frac{1}{\sqrt{x}}).$$

C'est-à-dire : $f(x+1) + f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

7. Soit $x > 1$. Comme f est décroissante sur $]0, +\infty[$, on a : $f(x+1) + f(x) \leq 2f(x)$ et $f(x-1) + f(x) \geq 2f(x)$.

En utilisant l'égalité de la question 6. avec x et $x - 1$, on obtient $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$ ou encore

$$1 \leq 2\sqrt{x} f(x) \leq \sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\sqrt{x} f(x) = 1$, c'est-à-dire que :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Problème 1. *Séries de fonctions.*

1. Soit $x > -1$. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n + x > 0$ donc $\ln(n+x)$ a un sens.

Et $u_n(x)=\frac{x}{n}-\ln(1+\frac{x}{n})=\frac{x}{n}-(\frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}))=\frac{x^2}{2n^2}+o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$. Donc $u_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{x^2}{2n^2}$.
Comme $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, $\sum_{n\geq 1}u_n(x)$ converge (règle de l'équivalent positif).

2. a. La série $\sum_{n\geq 1}v_n(x)$ converge par la règle de l'équivalent positif car $v_n(x)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente.

Remarque : Attention ! Si $x\in]-1,0[$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(n+x+1)(n+x)\leq n^2$ et donc $v_n(x)\geq\frac{1}{n^2}$.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}v_k(x)=\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{x+k}-\frac{1}{x+k+1})=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}$ donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty}v_k(x)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}v_k(x)=\frac{1}{x+1}.$$

2. b. Soit $a>-1$. On a : $\forall x\in[a,+\infty[$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $|v_n(x)|=v_n(x)\leq\frac{1}{(n+a+1)(n+a)}(=v_n(a))$.
La suite $(v_n(a))$ est une suite de réels positifs (ne dépendant pas de x) et d'après **2. a.** la série $\sum v_n(a)$ converge.
La série de fonctions $\sum v_n$ converge donc *normalement* sur $[a,+\infty[$.

Remarque : Notons, pour tout fonction f bornée sur $[a,+\infty[$, $\|f\|_\infty:=\sup_{x\in[a,+\infty[}|f(x)|$. Reformulons le résultat obtenu en utilisant cette norme infinie. On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\|v_n\|_\infty:=\sup_{x\in[a,+\infty[}|v_n(x)|=\sup_{x\in[a,+\infty[}v_n(x)=v_n(a)$. Ainsi la série (des normes infinies) $\sum\|v_n\|_\infty$ converge. D'où la dénomination convergence *normale.*

3. a. Soit $x>-1$. On vérifie facilement que

$$D(x)=S(x+1)-S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n(x+1)-u_n(x))=\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{x+n})).$$

3. b. Considérons pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>-1$, $w_n(x)=u_n(x+1)-u_n(x)=\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{x+n})$.
Notons pour simplifier $I=]-1,+\infty[$. Alors :

(i) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $w_n\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$, en remarquant que $\forall x\in I$, $w_n'(x)=\frac{1}{(n+x+1)(n+x)}=v_n(x)$.

(ii) La série de fonctions $\sum w_n$ converge simplement sur I d'après **1.** (ou **3. a.**) ... car $\forall x>-1$, $\sum u_n(x)$ et $\sum u_n(x+1)$ convergent.

(iii) Soit $[a,b]$ un segment quelconque de $]-1,+\infty[$. La série de fonctions $\sum w_n'$, c'est-à-dire la série de fonctions $\sum v_n$, converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$ d'après **2. b.** car cette série de fonctions converge en fait normalement sur $[a,+\infty[$.

Par conséquent, d'après le théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions, $D\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et d'après **2. a.** $\forall x\in I$, $D'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}w_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)=\frac{1}{x+1}$.

4. Précisons tout d'abord l'expression de la fonction D. D'après **3. b.**, il existe $K\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x>-1$, $D(x)=\ln(x+1)+K$. Or d'après **3. a.** $K=D(0)=C$. Donc $\forall x>-1$, $D(x)=\ln(x+1)+C$. Ainsi $\forall x>-1$, $\frac{T(x+1)}{T(x)}=e^{S(x+1)-S(x)}=e^{D(x)}=e^{C+\ln(x+1)}=e^Ce^{\ln(x+1)}=e^C(x+1)$.

5. a. Soit $x>0$. On a $\Gamma(x)>0$ et d'après **4.**

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}=\frac{x}{x+1}\,\frac{e^{-C(x+1)}}{e^{-Cx}}\,\frac{T(x+1)}{T(x)}=\frac{x}{x+1}\,e^{-C}\,\frac{T(x+1)}{T(x)}=\frac{x}{x+1}\,e^{-C}\,e^C(x+1)=x.$$

D'où $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.

5. b. Tout d'abord $\Gamma(1)=e^{-C}T(1)=e^{-C}e^{S(1)}=e^{-C}e^C=1$.
Soit p un entier supérieur ou égal à 2. En se servant $p-2$ fois de l'égalité de la question **5. a.** , avec $x=p-1$, $x=p-2,\dots,x=2$, on obtient

$$\Gamma(p)=(p-1)\Gamma(p-1)=(p-1)(p-2)\Gamma(p-2)=\cdots=(p-1)(p-2)\dots2.1.\Gamma(1)=(p-1)!\Gamma(1)=(p-1)!$$

Problème 2. *Un exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ mais nulle part dérivable.*

A. 1. La série géométrique $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2})^n$ converge car $|\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}<1$. On en déduit que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série $\sum_{n\geq 0}u_n(x)$ converge absolument par comparaison (donc converge) car pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n(x)|=\frac{|\cos(nx)|}{2^n}\leq\frac{1}{2^n}=(\frac{1}{2})^n$.

A. 2. D'après le théorème de continuité du chapitre série de fonctions (CVU et continuité), f est continue sur $\mathbb{R}$ car :

a) Chaque fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}$ (comme composée car cos est continue sur $\mathbb{R}$),

b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 0}u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ (et a fortiori sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$) : en effet, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est bornée sur $\mathbb{R}$ avec $\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}=\sup_{x\in\mathbb{R}}|u_n(x)|=|u_n(0)|=(\frac{1}{2})^n$ et la série $\sum_{n\geq 0}\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$, c'est-à-dire la série géométrique $\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{2})^n$, converge.

B. 1. Par définition de la partie entière, on a : $e_n \leq \dfrac{6^n x_0}{\pi} < e_n + 1$ d'où $\dfrac{\pi}{6^n} e_n \leq x_0 < \dfrac{\pi}{6^n}(e_n+1)$, c'est-à-dire $a_n \leq x_0 < b_n$.
On a aussi $x_0 - \frac{\pi}{6^n} < a_n \leq x_0$ et $x_0 < b_n \leq x_0 + \frac{\pi}{6^n}$ car $b_n = a_n + \frac{\pi}{6^n}$. Enfin comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\pi}{6^n} = 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = x_0$$

par le théorème des gendarmes.

B. 2. a. Rappelons que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\cos(2N\pi) = 1$. On a :

$$R_n(a_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(a_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\cos(6^{k-n} e_n \pi)}{2^k}.$$

Or pour tout entier $k \geq n+1$, $k - n \in \mathbb{N}^*$ et $6^{k-n} = 2^{k-n}3^{k-n}$ est un *entier pair*, ainsi que l'entier $6^{k-n}e_n$, donc $\cos(6^{k-n}e_n\pi) = 1$ et :

$$R_n(a_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k \underset{p=k-(n+1)}{=} (\frac{1}{2})^{n+1} \sum_{p=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^p = (\frac{1}{2})^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^n.$$

De même $R_n(b_n) = (\frac{1}{2})^n$ car pour tout entier $k \geq n+1$, $6^{k-n}(e_n+1) = 2^{k-n}3^{k-n}(e_n+1)$ est un *entier pair*.

B. 2. b. Rappelons que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ et que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\cos(p\pi) = (-1)^p$. Donc comme $e_n \in \mathbb{Z}$:

$$u_n(b_n) - u_n(a_n) = \frac{1}{2^n}(\cos(\pi(e_n+1)) - \cos(\pi e_n)) = \frac{1}{2^n}(-2\cos(\pi e_n)) = \frac{1}{2^n}(-2(-1)^{e_n}) = \frac{(-1)^{e_n+1}}{2^{n-1}} = (-1)^{e_n-1}\, 2^{-n+1}.$$

B. 2. c. Rappelons que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$ $(*)$.
Rappel : cette inégalité s'obtient classiquement en utilisant l'égalité ou l'inégalité des accroissements finis avec la fonction cos.

On a : $S_{n-1}(b_n) - S_{n-1}(a_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(6^k b_n) - \cos(6^k a_n)}{2^k}$ et par l'inégalité triangulaire puis $(*)$:

$$|S_{n-1}(b_n) - S_{n-1}(a_n)| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\cos(6^k b_n) - \cos(6^k a_n)|}{2^k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{6^k \frac{\pi}{6^n}}{2^k} = \frac{\pi}{6^n} \sum_{k=0}^{n-1} 3^k.$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 3^k = \frac{3^n - 1}{2} \leq \frac{3^n}{2}$, on obtient l'inégalité : $|S_{n-1}(b_n) - S_{n-1}(a_n)| \leq \dfrac{\pi}{6^n}\dfrac{3^n}{2} = \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

B. 2. d. Rappelons que pour tout $(v,w) \in \mathbb{R}^2$, $|v + w| \geq |v| - |w|$ $(**)$ (car $|v| = |(v+w) + (-w)| \leq |v+w| + |-w| = |v+w| + |w|$).
Remarquons tout d'abord que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a : $f(x) = S_{n-1}(x) + u_n(x) + R_n(x)$ ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} f(b_n) - f(a_n) &= (S_{n-1}(b_n) + u_n(b_n) + R_n(b_n)) - (S_{n-1}(a_n) + u_n(a_n) + R_n(a_n)) \\ &= (u_n(b_n) - u_n(a_n)) + (S_{n-1}(b_n) - S_{n-1}(a_n)) \end{aligned}$$

car $R_n(a_n) = R_n(b_n)$ (cf. B. 2. a). puis en utilisant $(**)$ avec $v = (u_n(b_n) - u_n(a_n))$ et $w = (S_{n-1}(b_n) - S_{n-1}(a_n))$, on obtient :

$$|f(b_n) - f(a_n)| \geq |u_n(b_n) - u_n(a_n)| - |S_{n-1}(b_n) - S_{n-1}(a_n))| = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

d'après B. 2. b et B. 2. c. et enfin comme $b_n - a_n = \frac{\pi}{6^n}$:

$$\frac{|f(b_n) - f(a_n)|}{|b_n - a_n|} \geq (\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{\pi}{2^{n+1}})\frac{6^n}{\pi} = \frac{3^n}{\pi}(2 - \frac{\pi}{2}).$$

B. 3. Supposons f dérivable en x_0.
Rappel. Considérons la fonction ε définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ si $x \neq x_0$ et $\varepsilon(x_0) = 0$.
Cette fonction est continue en x_0 car

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} (\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 = \varepsilon(x_0)$$

(et plus précisement continue sur $\mathbb{R}$ car continue en tout $x \neq x_0$ d'après les propriétés générales sur la continuité).
On réécrit alors ce qui précède de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)\ (***)$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. L'égalité $(***)$ est *le développement limité à l'ordre* 1 *de* f *en* x_0.

En utilisant l'égalité $(***)$ avec a_n et b_n, on obtient après simplifications :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0) + \frac{b_n - x_0}{b_n - a_n}\varepsilon(b_n) + \frac{x_0 - a_n}{b_n - a_n}\varepsilon(a_n).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(b_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(a_n) = 0$ car ε est continue en x_0.
De plus $\frac{b_n - x_0}{b_n - a_n} \in [0,1]$ et $\frac{x_0 - a_n}{b_n - a_n} \in [0,1]$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(x_0)$$

et par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}| = |f'(x_0)|$ $(****)$.
Reprenons maintenant la fonction f de notre problème : d'après B. 2. d. on a :

$$\lim_{n\to+\infty} |\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}| = +\infty$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3^n}{\pi}(2 - \dfrac{\pi}{2}) = +\infty$, en contradiction avec $(****)$.
Ainsi f n'est pas dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.