Exercice 1. *Séries numériques.*

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme (logarithme d'un quotient, d'un produit, d'une puissance), on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(\frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}) = \ln(\sqrt{n}+(-1)^n) - \ln(\sqrt{n+1}) \\ &= \ln(\sqrt{n}(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})) - \ln(\sqrt{n}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}\,) \\ &= \ln(\sqrt{n}) + \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) - (\ln(\sqrt{n}) + \ln(\sqrt{1+\frac{1}{n}})) \\ &= \ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

On effectue alors un développement asymptotique de u_n à l'ordre 1 en $\frac{1}{n}$. Comme $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$, on a :

$$\ln(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n}).$$

Et $\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$, d'où : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$. Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $b_n = -\frac{1}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$.

La série $\sum a_n$ est une série alternée, convergente d'après le critère des séries alternées car $(\frac{1}{\sqrt{n}}) \searrow 0$. De plus, $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{n}$, donc la série $\sum b_n$ diverge par la règle de l'équivalent de signe constant. Par conséquent, la série $\sum u_n$ diverge comme somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Exercice 2. *Suites de fonctions.*

1. On distingue deux cas : $x = 0$ et $x > 0$. On a :

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

b) Soit $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{nx}} = 1$.

Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$.

2. Chaque fonction f_n est continue en 0. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$, f serait alors, par théorème, continue en 0. Or f n'est pas continue en 0, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers f.

3. Soit $a > 0$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq a$, $f_n(x) - f(x) = f_n(x) - 1 = -\frac{1}{1+nx}$. Donc $f_n - f$ est bornée sur $[a, +\infty[$ avec :

$$\|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty[} \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{1+na}\ (= \max_{x\in[a,+\infty[} \frac{1}{1+nx})$$

par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{1+nx}$ sur $[a, +\infty[$. Or

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[a,+\infty[} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+na} = 0,$$

donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Exercice 3. *Suites de fonctions.*

1. Soit $x \in [0, 1]$. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n(x) : 0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ est vraie.

Initialisation. $\mathcal{P}_0(x)$ est vraie car $P_0(x) = 0$ et $0 \leq 0 \leq \sqrt{x}$!

Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n(x)$ soit vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}(x)$.

On a : $0 \leq P_n(x)^2 \leq x$ d'où $P_{n+1}(x) \geq 0$ comme somme des deux réels positifs $P_n(x)$ et $\frac{1}{2}(x - P_n^2(x))$.

De plus :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \geq 0$$

car grâce à $\mathcal{P}_n(x)$, $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et $\frac{1}{2}(\sqrt{x} + \underbrace{P_n(x)}_{\leq\sqrt{x}}) \leq \sqrt{x} \leq 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}(x)$ est vraie.

Par conséquent, la propriété $\mathcal{P}_n(x)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$(... et pour tout $x \in [0, 1]$).

2. Fixons $x \in [0, 1]$. Prouvons que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x) = \sqrt{x}$. On constate que :

i) La suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante d'après **1.** car $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(x) - P_n(x) = \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \in \mathbb{R}^+$.

ii) La suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\sqrt{x}$ d'après **1.**

Donc la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell(x)$ par le théorème de la limite monotone.

Remarque. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans : $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$, on obtient déjà : $0 \leq \ell(x) \leq \sqrt{x}$.

Enfin la valeur exacte de $\ell(x)$ est obtenue en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité : $P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\big(x - P_n^2(x)\big)$ vérifiée par hypothèse pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ce passage à la limite nous donne :

$$\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x - \ell(x)^2)$$

d'où $\ell(x)^2 = x$ et $\ell(x) = \sqrt{x}$ car $\ell(x) \geq 0$.

3. Soit $x \in [0,1]$. Reprenons l'égalité $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - P_n(x))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x))$.
Comme $P_n(x) \geq 0$, on a $\sqrt{x} + P_n(x) \geq \sqrt{x}$ et

$$1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + P_n(x)) \leq 1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

et comme $\sqrt{x} - P_n(x) \in \mathbb{R}^+$, on a donc :

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq (1 - \frac{1}{2}\sqrt{x})(\sqrt{x} - P_n(x)).$$

D'où en itérant n fois :

$$\sqrt{x} - P_n(x) \leq (1 - \frac{1}{2}\sqrt{x})(\sqrt{x} - P_{n-1}(x)) \leq (1 - \frac{1}{2}\sqrt{x})^2(\sqrt{x} - P_{n-2}(x)) \leq \cdots \leq (1 - \frac{1}{2}\sqrt{x})^n(\sqrt{x} - \underbrace{P_0(x)}_{=0}).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons : $\phi_n(t) = t(1 - \frac{t}{2})^n$, $t \in [0,1]$. L'étude du signe de $\phi_n'(t)$ sur $[0,1]$ montre que la fonction (positive) ϕ_n est croissante sur $[0, \frac{2}{n+1}]$ et décroissante sur $[\frac{2}{n+1}, 1]$. D'où $\max\limits_{t \in [0,1]} \phi_n(t) = \phi(\frac{2}{n+1}) = \frac{2}{n+1}(1 - \frac{1}{n+1})^n$.

5. D'après ce qui précède, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \underline{\forall x \in [0,1]}, |\sqrt{x} - P_n(x)| \underbrace{=}_{\mathbf{1.}} \sqrt{x} - P_n(x) \underbrace{\leq}_{\mathbf{3.}} \phi_n(\sqrt{x}) \underbrace{\leq}_{\mathbf{4.}} \frac{2}{n+1} \underbrace{(1 - \frac{1}{n+1})^n}_{\leq 1} \leq \frac{2}{n+1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{N+1} \leq \varepsilon$, c'est-à-dire tel que $N \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1$ (N ne dépend que de ε). Alors :

$$\forall n \geq N, \underline{\forall x \in [0,1]}, |\sqrt{x} - P_n(x)| \leq \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{N+1} \leq \varepsilon.$$

On vient de prouver que la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.

Autre rédaction possible pour prouver la CVU de (P_n) vers la fonction racine carrée sur $[0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto \sqrt{x} - P_n(x)$ est bornée sur $[0,1]$ et par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,1]} |\sqrt{x} - P_n(x)| = 0$$

car $0 \leq \sup\limits_{x \in [0,1]} |\sqrt{x} - P_n(x)| \leq \frac{2}{n+1}$.

Exercice 4. `[extrait CCINP-MP-2020]` *Séries de fonctions.* Posons, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \frac{1 + \sin(nx)}{3^n}$.

0. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n \geq 1} u_n(x)$, à termes positifs, converge par comparaison car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(x) \leq 2 \cdot (\frac{1}{3})^n$$

sachant que la série géométrique $\sum\limits_{n \geq 1} (\frac{1}{3})^n$ (de raison $\frac{1}{3} \in [0,1[$) converge.

Plus précisement, la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} u_n(x) = |u_n(\frac{\pi}{2n})| = 2 \cdot (\frac{1}{3})^n$$

et la série $\sum\limits_{n \geq 1} \|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}}$ (géométrique de raison $\frac{1}{3}$) converge.

1. On constate que :

i) Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $u_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{3^n}$,

ii) La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ d'après **0.**

iii) La série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n'$ CVN (donc CVU) sur $\mathbb{R}$ (a fortiori tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$) car u_n' est bornée sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n'(x)| = |u_n'(0)| = \frac{n}{3^n}$$

et la série $\sum\limits_{n \geq 1} \|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}}$ converge par le critère de D'Alembert : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\|u_{n+1}'\|_{\infty,\mathbb{R}}}{\|u_n'\|_{\infty,\mathbb{R}}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{3} < 1$.

Le théorème de dérivation terme à terme de la somme d'une série de fonctions permet de conclure que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n}.$$

2. *Rappel : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$,* $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a classiquement :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{3})^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{p=0}^{+\infty}(\frac{1}{3})^p + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im}\ (\frac{e^{inx}}{3^n}) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + \mathrm{Im}\ (\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{e^{ix}}{3})^n) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\ (\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{e^{ix}}{3})^n - 1) = \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\ (\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{e^{ix}}{3})^n) \text{ car } \mathrm{Im}\ (1) = 0. \\
&= \frac{1}{2} + \mathrm{Im}\ (\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{3}}) \text{ d'après le rappel avec } z = \tfrac{e^{ix}}{3} \text{ car } |\tfrac{e^{ix}}{3}| = \tfrac{1}{3} < 1. \\
&= \frac{1}{2} + 3\,\mathrm{Im}\ (\frac{1}{3-e^{ix}}) = \frac{1}{2} + 3\,\mathrm{Im}\ (\frac{3-e^{-ix}}{(3-e^{ix})(3-e^{-ix})}) \\
&= \frac{1}{2} + 3\,\frac{\sin x}{10-6\cos x} = \frac{5-3\cos x+3\sin x}{10-6\cos x}.
\end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après **1.** et **2.**, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n} = f'(x) = \frac{d}{dx}\,(\frac{1}{2} + 3\,\frac{\sin x}{10-6\cos x}) = 3\frac{d}{dx}\,(\frac{\sin x}{10-6\cos x}) = 3\frac{\cos x(10-6\cos x) - \sin x\cdot(6\sin x)}{(10-6\cos x)^2} = 3\frac{10\cos x - 6}{(10-6\cos x)^2}$$

car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

4. Cette série, à termes positifs, converge par comparaison car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le \dfrac{1}{n3^{n+1}}(1+(-1)^{n-1}) \le \dfrac{2}{n3^{n+1}} = b_n$ et la série $\displaystyle\sum_{n\ge1} b_n$ converge par le critère de D'Alembert : $b_n > 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \in [0,1[$.

De plus, la série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n\ge1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (cf. **0.**) donc converge uniformément sur $[0,\pi]$. Donc par le théorème d'intégration terme à terme (CVU et intégration), on a :

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}[x - \frac{1}{n}\cos(nx)]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n}(\pi + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n}) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n3^n}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n3^{n+1}} &= \frac{1}{3}(\int_0^\pi f(x)\,dx - \frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\pi(\frac{1}{2} + \frac{3\sin x}{10-6\cos x})\,dx - \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\pi}{6} + \int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\,dx - \frac{\pi}{6} = \int_0^\pi \frac{\sin x}{10-6\cos x}\,dx.
\end{aligned}$$

5. a. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Considérons la somme $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n3^{n+1}}$. Comme les termes d'indices pairs de S_N sont nuls, on a :

$$S_N = \sum_{p=0}^{N}\frac{2}{(2p+1)\cdot 3^{2p+2}} = \frac{2}{3}\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)}(\frac{1}{3})^{2p+1}$$

Et finalement $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}+1}{n3^{n+1}} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \frac{2}{3}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)}(\frac{1}{3})^{2p+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}\ln(2)$

car pour tout $a \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a^{2p+1}}{2p+1} = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+a}{1-a})$.

5. b. On obtient directement la valeur exacte de I en utilisant les propriétés de la fonction ln :

$$I = \frac{1}{6}[\ln(10-6\cos x)]_0^\pi = \frac{1}{6}(\ln(16)-\ln(4)) = \frac{1}{6}\ln(4) = \frac{1}{3}\ln(2).$$

Exercice 5. *Séries de fonctions.*

1. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(nx)} = \dfrac{2}{e^{nx}+e^{-nx}}$.

Le domaine de définition D_f de la fonction f est l'ensemble des réels x tels que la série $\displaystyle\sum_{n\ge0} u_n(x)$ converge.

Distinguons trois cas :

i) Cas $x = 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 1$. La série $\sum u_n(0)$ diverge grossièrement. Donc $0 \notin D_f$.

ii) Cas $x > 0$: $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{-nx} = 2(e^{-x})^n$. Comme la série $\sum(e^{-x})^n$ converge car géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\ge0} u_n(x)$ converge par la règle de l'équivalent positif. Donc $x \in D_f$.

iii) Cas $x < 0$: la série $\sum u_n(x)$ converge : ch étant paire, la série $\sum u_n(x) = \sum u_n(-x)$ converge d'après *ii)* car $-x > 0$.

Autre rédaction possible n'utilisant pas la parité de ch : $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2e^{nx} = 2(e^x)^n$. Comme la série $\sum(e^x)^n$ converge car géométrique de raison $e^x \in]0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\ge0} u_n(x)$ converge par la règle de l'équivalent positif. Donc $x \in D_f$.

En conclusion, f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et f est paire sur $\mathbb{R}^*$ car $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$.

2. *i*) Chaque fonction u_n est continue sur $]0, +\infty[$ car ch est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas.

ii) La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$ car, la fonction $\frac{1}{\mathrm{ch}}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a, b],\ |u_n(x)| = u_n(x) \leq u_n(a) \ \text{ (indépendant de } x\text{)}$$

et d'après **1.** la série $\sum u_n(a)$ converge.

Variante de rédaction : $\|u_n\|_{\infty,[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |u_n(x)| = \max_{x\in[a,b]} u_n(x) = u_n(a)$, donc d'après **1.** la série $\sum \|u_n\|_{\infty,[a,b]}$ converge.

Par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues, f est continue sur $]0, +\infty[$ et, comme f est paire, f est aussi continue sur $] - \infty, 0[$.

3. a. Classique : intégrer par rapport à t entre nx et $(n+1)x$ l'inégalité $\frac{1}{\mathrm{ch}(t)} \leq \frac{1}{\mathrm{ch}(nx)}$ et entre $(n-1)x$ et nx l'inégalité $\frac{1}{\mathrm{ch}(nx)} \leq \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}$.

3. b. Déterminons par exemple l'unique primitive F de $\frac{1}{\mathrm{ch}}$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.
Le changement de variable $u = e^t$ dans $F(x)$ donne :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_0^x \frac{2}{e^t + e^{-t}}\, dt = \int_1^{e^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \cdot \frac{du}{u} = \int_1^{e^x} \frac{2}{1+u^2}\, du = [2\arctan(u)]_1^{e^x} = 2\big(\arctan(e^x) - \frac{\pi}{4}\big).$$

Les primitives de $\frac{1}{\mathrm{ch}}$ sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions : $x \mapsto 2\arctan(e^x) + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant tout d'abord la double inégalité obtenue en **3. a.** de $n = 1$ à $n = N$, on obtient :

$$\int_x^{(N+1)x} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{\mathrm{ch}(nx)} \leq \int_0^{Nx} \frac{dt}{\mathrm{ch}(t)},$$

c'est-à-dire d'après **3. b.** :

$$2\big(\arctan(e^{(N+1)x}) - \arctan(e^x)\big) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{x}{\mathrm{ch}(nx)} \leq 2\big(\arctan(e^{Nx}) - \frac{\pi}{4}\big).$$

Puis en faisant tendre N vers $+\infty$ dans la double inégalité précédente, on obtient :

$$\pi - 2\arctan(e^x) \leq x(f(x) - 1) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, comme $\lim_{x\to 0^+} \pi - 2\arctan(e^x) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que :

$$\lim_{x\to 0^+} x(f(x) - 1) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où $\lim_{x\to 0^+} xf(x) = \frac{\pi}{2}$. En conclusion, $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.

Remarque. Cet équivalent implique que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.