

Calculatrices autorisées

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin, de la clarté et de la rigueur de la rédaction. Les résultats doivent être encadrés et justifiés ; les mots-clés doivent être soulignés.

Il est rappelé qu'une application numérique donnée sans unité est considérée comme nulle, que les axes d'une courbe doivent être précisés et qu'une formule non homogène ne rapporte aucun point.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera clairement sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

EXERCICE 1 : Etude des performances thermiques du Kairlin

[CCINP PC 2023 : Modélisation]

Partie I - Contexte de l'étude

Source : <https://www.kairos-jourdain.com/fr/environnement/kairlin>

Véritable révolution dans le domaine des matériaux, les composites offrent de nombreux avantages comparativement aux matériaux standards : performances mécaniques supérieures, faible masse volumique ou durée de vie améliorée... Ces avantages sont obtenus grâce à leur structure composée d'un renfort, constituant l'ossature, et d'une matrice ou résine, assurant la cohésion du matériau.

Issu du bureau d'étude de l'entreprise Kairos, le Kairlin® (**figure 1**), est un matériau bio-composite conçu à partir de fibres de lin et de composants 100 % végétaux destiné à la construction de voiliers de course. Le respect de l'environnement a été l'un des principaux critères considéré lors du développement du produit. Désireux d'élargir son offre et de permettre l'emploi du Kairlin® au plus grand nombre, Kairos envisage d'élargir son usage à l'industrie du bâtiment comme isolant thermique et phonique.

Cet exercice vise à déterminer quelle devra être l'épaisseur minimum du composite permettant de garantir des performances thermiques conformes aux recommandations du gouvernement pour les usages du génie civil.



Figure 1 - Le Kairlin®, un composite biosourcé

Partie II - Étude des performances thermiques

La performance thermique est un critère essentiel dans le choix de tout isolant. En effet, ce paramètre influence directement l'énergie dissipée à travers les parois du bâtiment et est donc lié à l'énergie supplémentaire que l'on doit fournir au bâtiment pour maintenir une température donnée.

II.1 - Étude analytique du régime permanent

On s'intéresse tout d'abord aux transferts thermiques dans le composite (**figure 2**) lorsque la température intérieure $T(t, x = 0) = T_{int} = 20 \text{ °C}$ et la température extérieure $T(t, x = L) = T_{ext} = 5 \text{ °C}$. On supposera ces températures constantes et uniformes sur toute la surface de la paroi. On souhaite étudier l'évolution de la température dans le mur, en supposant que le matériau est homogène d'un point de vue thermique et que sa température est à $T(t = 0, x > 0) = T_{ext}$.

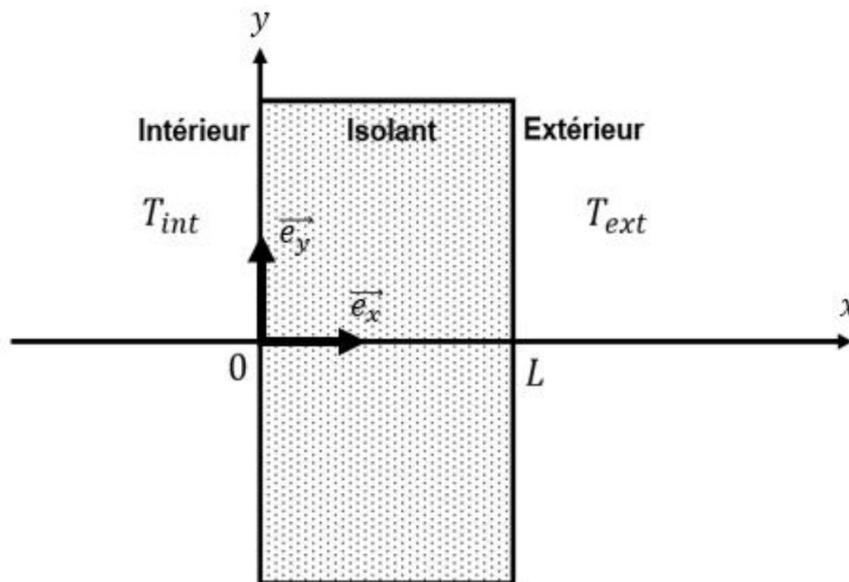


Figure 2 - Schématisation du problème

- Q1. Quelles hypothèses sont faites pour se ramener à une modélisation unidimensionnelle suivant x ?
- Q2. Donner, sans démontrer, l'équation de la diffusion thermique en régime non permanent et en l'absence de source interne. On notera T la température, $\lambda_{isolant}$ la conductivité thermique de l'isolant, ρ la masse volumique et c_p la chaleur spécifique à pression constante, i.e. la capacité thermique massique. La simplifier en prenant en compte l'hypothèse de la **question Q1**.
- Q3. Donner les conditions aux limites, $T(t > 0, x = 0)$ et $T(t, x = L)$, et les conditions initiales $T(t = 0, x > 0)$ et $T(t = 0, x = 0)$ de la fonction $T(t, x)$.
- Q4. Déterminer l'expression de la température en régime permanent $T(x)$ en fonction des variables x , T_{ext} , T_{int} et L .
- Q5. Proposer une définition de la résistance thermique et en donner la formule. En déduire l'expression de la résistance thermique surfacique r_{th} de l'isolant en fonction de l'épaisseur L de la plaque et de la conductivité thermique de l'isolant $\lambda_{isolant}$.
- Q6. Quelle doit être la valeur de l'épaisseur du composite pour obtenir une résistance thermique surfacique de $r_{th} = 3,15 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$? On prendra $\lambda_{isolant} = 0,037 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

II.2 - Étude numérique du régime transitoire

Une annexe présente en fin d'exercice rappelle l'utilisation de quelques fonctions Python.

On cherche à résoudre numériquement l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_{th} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \text{ où } k_{th} \text{ est une constante.}$$

Q7. Exprimer la diffusivité thermique k_{th} en fonction de la conductivité thermique $\lambda_{isolant}$, de la masse volumique ρ et de la chaleur spécifique massique à pression constante c_p .

On discrétise l'intervalle $[0, L]$, représentant l'épaisseur de l'isolant, en $N_X + 1$ points régulièrement espacés d'un pas spatial dx (**figure 3**). On souhaite déterminer la température en chacun de ces points.

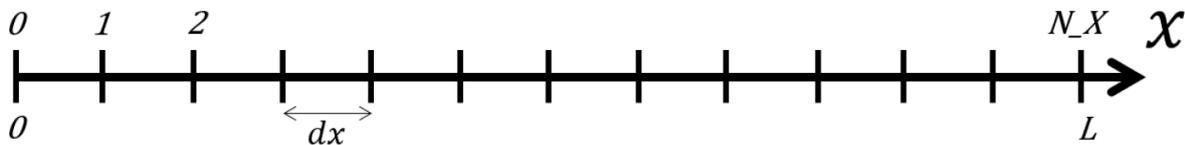


Figure 3 - Discretisation de l'isolant selon x

Q8. Donner le nombre d'intervalles spatiaux dans l'intervalle $[0, L]$. Donner l'expression de dx en fonction des données du problème. En déduire l'abscisse x_i du (i) -ème point.

Q9. À l'aide de la formule de Taylor-Young, **équation (1)**, exprimer :

- $T(t + dt, x)$, au premier ordre par rapport à t , dt étant l'incrément temporel ;
- $T(t, x - dx)$, au second ordre par rapport à x ;
- $T(t, x + dx)$, au second ordre par rapport à x .

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x - a) + \frac{f''(a)}{2!} (x - a)^2 + o((x - a)^2) \quad (1)$$

Q10. En déduire une expression de $\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$ en fonction de dx , $T(t, x)$, $T(t, x - dx)$ et $T(t, x + dx)$.

La température à l'abscisse x_i à une date t_n sera notée : T_i^n .

Q11. En reformulant le résultat des **questions Q9** et **Q10**, déterminer une relation entre :

- T_i^{n+1} , T_i^n , $\frac{\partial T(t, x)}{\partial t}$ et dt ;
- T_{i+1}^n , T_{i-1}^n , T_i^n , $\frac{\partial^2 T(t, x)}{\partial x^2}$ et dx .

Q12. À partir des **questions Q2** et **Q11**, montrer que :

$$T_i^{n+1} = dt \cdot k_{th} \left(\frac{T_{i+1}^n + T_{i-1}^n - 2T_i^n}{(dx)^2} \right) + T_i^n. \quad (2)$$

Le code de l'**algorithme 1** permet de déterminer les valeurs de température aux points de discrétisation. Dans les questions suivantes, on cherchera à compléter les instructions manquantes.

Q13. Donner l'**Instruction 1** permettant de définir la diffusivité thermique k_{th} .

Q14. L'**équation (2)** est-elle valable pour toute valeur de $i \in \{0 \dots N_X\}$?

Q15. Définir les incréments de temps et d'espace en précisant les **Instruction 2.1** et **Instruction 2.2**. N_t intervalles seront réalisés dans l'intervalle de temps $[0; t_{max}]$.

Q16. Dédire de la **question Q3** les Instruction 3.1, Instruction 3.2, Instruction 3.3 et Instruction 3.4.

Q17. À partir de la **question Q12**, compléter Instructions 4.1, Instructions 4.2 et Instructions 4.3.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Données du problème
Lambda = 0.037
Cp = 1500
Rho = 1.325
L = 1      #Epaisseur de l'isolant
t_max = 20000 #Temps de fin d'intégration en secondes
N_t = 100   #Nombre d'intervalles dans le temps
N_X = 5     #Nombre d'intervalles dans l'espace
T_int = 20
T_ext = 5
K = [Instruction 1]      #Diffusivité thermique

#Discretisation de l'espace et du temps
dx = [Instruction 2.1]
dt = [Instruction 2.2]
Temp = np.zeros((N_t+1, N_X+1))

#Initialisation de la température
#Conditions initiales
Temp[0,0]=[Instruction 3.1]

for i in range(1,N_X+1):
    [Instruction 3.2]

#Conditions aux limites
for n in range(1,N_t+1):
    [Instruction 3.3]
    [Instruction 3.4]

#Calcul des températures aux différents instants
for n in [Instruction 4.1]:
    for i in [Instruction 4.2]:
        [Instruction 4.3]
```

Algorithme 1 - Algorithme permettant d'obtenir le profil de température à différents instants

On donne en **figure 4** le profil de température dans le composite à plusieurs instants.

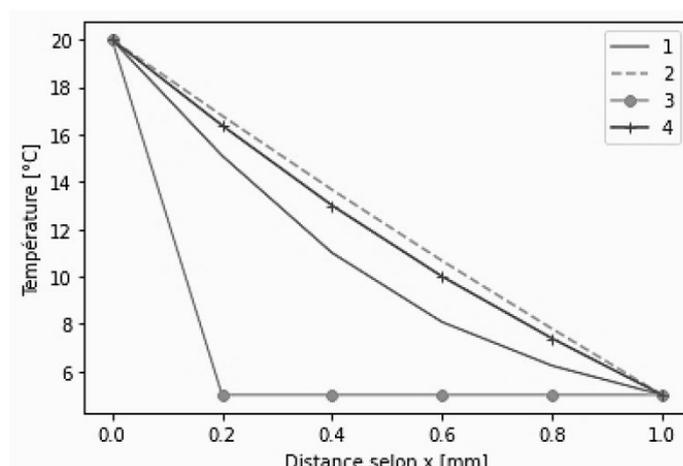


Figure 4 - Évolution de la température dans le composite à plusieurs instants

Q18. Associer à chaque courbe de la **figure 4** les instants de la liste suivante :

$$t = [0 \text{ s}, 6\,000 \text{ s}, 12\,000 \text{ s}, 18\,000 \text{ s}].$$

Q19. Le régime permanent est-il atteint ? Justifier.

ANNEXE

Quelques commandes utiles en langage Python

I. - Bibliothèque NUMPY

Dans les exemples ci-dessous, la bibliothèque `numpy` a préalablement été importée à l'aide de la commande : `import numpy as np`.

On peut alors utiliser les fonctions de la bibliothèque, dont voici quelques exemples :

- **np.linspace(start, stop, N point) :**

- o description : renvoie un nombre d'échantillons espacés uniformément, calculés sur l'intervalle [start, stop]
- o argument d'entrée : début, fin et nombre d'échantillons dans l'intervalle
- o argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.linspace(1, 4, 5)</code>	<code>[1., 1.75, 2.5, 3.25, 4.]</code>

- **np.zeros(i) :**

- o description : renvoie un tableau de taille `i` rempli de zéros.
- o argument d'entrée : un scalaire
- o argument de sortie : un tableau

Commande	Résultat
<code>np.zeros(5)</code>	<code>[0, 0, 0, 0, 0]</code>

- **np.array(liste) :**

- o description : crée une matrice (de type tableau) à partir d'une liste.
- o argument d'entrée : une liste définissant un tableau à 1 dimension (vecteur) ou 2 dimensions (matrice)
- o argument de sortie : un tableau (matrice)

Commande	Résultat
<code>np.array([4, 3, 5])</code>	<code>[4, 3, 5]</code>

- **A[i, j] :**

- o description : retourne l'élément $(i + 1, j + 1)$ de la matrice `A`. Pour accéder à l'intégralité de la ligne $i + 1$ de la matrice `A`, on écrit `A[i, :]`. De même, pour obtenir toute la colonne $j + 1$ de la matrice `A`, on utilise la syntaxe `A[:, j]`
- o argument d'entrée : une liste contenant les coordonnées de l'élément dans le tableau `A`
- o argument de sortie : l'élément $(i + 1, j + 1)$ de la matrice `A`

Commande	Résultat
<code>A = np.array([[1, 2, 1],[4, 6, 3], [1, 3, 8]])</code> <code>A[1, 2]</code>	3

La clarification par décantation est une des étapes réalisées dans le traitement des eaux des stations d'épuration. Elle consiste à éliminer les particules polluantes en suspension dans l'eau polluée.

L'eau polluée, c'est-à-dire chargée en particules non désirées, circule en continu dans le bassin de décantation (**figure 4**), à faible vitesse horizontale \bar{u} . Les particules ont le temps de se déposer au fond du bassin et l'eau de sortie est ainsi clarifiée.

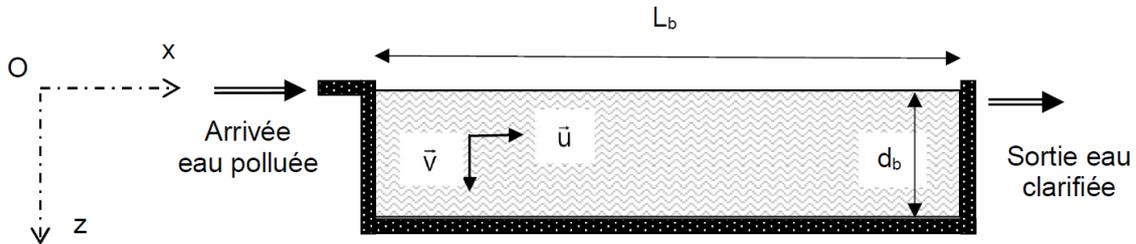


Figure 4 - Bassin de décantation

Le bassin de décantation est de longueur L_b et de profondeur d_b , sa largeur est indifférente. On note respectivement η et ρ_e la viscosité dynamique et la masse volumique de l'eau polluée. η et ρ_e sont supposées constantes.

On définit le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ lié au bassin. L'axe Oz est vertical descendant. Le niveau d'entrée de l'eau dans le bassin correspond à la cote $z = 0$.

On suppose que les particules polluantes sont sphériques, de rayon r , et qu'elles sont soumises à la force de frottement fluide : $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$, où \vec{v} est la vitesse des particules.

On rappelle l'expression de la poussée d'Archimède agissant sur les particules polluantes au sein de l'eau polluée :

$$\vec{\Pi} = -\rho_e V_0 g \vec{e}_z$$

avec V_0 le volume d'une particule polluante et g l'accélération de la pesanteur.

On note ρ_0 la masse volumique des particules polluantes, supposée constante. On a : $\rho_0 > \rho_e$.

On considère que l'eau arrive en amont du bassin avec une densité en particules polluantes notée N_0 .

Dans un premier temps, l'eau ne circule pas horizontalement, $\bar{u} = \vec{0}$, et les particules polluantes qu'elle contient chutent verticalement.

Compte tenu des phénomènes de transport des particules polluantes dans le bassin, la densité en particules polluantes n'est pas uniforme sur la hauteur du bassin. Elle dépend de la profondeur z . Dans le bassin, on note $n(z)$ la densité en particules polluantes à l'altitude z et n_0 la valeur associée à l'altitude $z = 0$, soit $n_0 = n(z = 0)$.

Q14. À partir de l'équation différentielle du mouvement, issue de la seconde loi de Newton, établir, en fonction de ρ_0 , ρ_e , r , η et de l'accélération g de la pesanteur, la vitesse limite $\vec{v}_l = v_l \vec{e}_z$ atteinte par ces particules. Quel est le signe de v_l ? Exprimer en fonction de ρ_0 , r et de η , le temps caractéristique τ_c d'établissement de cette vitesse limite.

On supposera par la suite que la constante de temps τ_c est très faible devant le temps de sédimentation (*i.e.* le temps de chute dans le bassin) de sorte que le mouvement des particules est considéré comme uniforme à la vitesse \vec{v}_l .

Q15. Cette chute des particules est à l'origine d'un courant convectif vertical des particules. On note : $\vec{j} = j(z)\vec{e}_z$, le vecteur densité de courant de particules associé. Préciser l'unité de \vec{j} . Puis exprimer le vecteur \vec{j} en fonction de $n(z)$ et de \vec{v}_l .

En plus du courant précédent, on observe l'existence d'un second courant qui résulte d'un phénomène de diffusion. On note D le coefficient de diffusivité des particules dans l'eau et $\vec{j}_D = j_D(z)\vec{e}_z$ le vecteur densité de courant de particules associé à ce second courant.

Q16. Rappeler la loi de Fick et préciser les unités des grandeurs qui interviennent. Justifier qualitativement l'existence de ce courant de diffusion. Préciser s'il est ascendant ou descendant.

Q17. En régime permanent, ces deux courants se compensent. En déduire, en fonction de n_0 , D et de v_l l'expression de la densité de particules $n(z)$. Représenter graphiquement la fonction $n(z)$ en fonction de z .

Q18. Par conservation du nombre de particules sur une tranche verticale du bassin, exprimer n_0 en fonction de N_0 , D , d_b et de v_l .

Q19. Définir en fonction de d_b , D et de v_l , un temps caractéristique τ_s de sédimentation, ainsi qu'un temps caractéristique τ_D de diffusion des particules sur la hauteur du bassin.

Q20. Exprimer n_0 en fonction de N_0 , τ_s et de τ_D . À quelle condition portant sur τ_s et τ_D , la décantation statique permet-elle une clarification de l'eau ?

EXERCICE 3 : Evolution de la température autour d'un combustible nucléaire

[Centrale PSI 2024]

Un formulaire est présent en fin d'exercice.

Le cœur est constitué de $N = 41448$ crayons combustibles. Chaque crayon combustible est constitué d'un cylindre de hauteur $H = 3,66$ m et de diamètre $d = 2R_4 = 9,5$ mm. Ces crayons sont le siège de réactions de fission, exothermiques.

La puissance thermique développée dans le cœur vaut : $P_1 = 2776$ MW.

Le circuit primaire doit être correctement dimensionné pour prévenir tout échauffement anormal du combustible, $\text{UO}_{2(s)}$, dont la température de fusion vaut 2800 °C. La conductivité thermique de $\text{UO}_{2(s)}$ vaut $\lambda_2 = 3,5$ W·m⁻¹·K⁻¹.

La pression de vapeur saturante de l'eau à 345 °C vaut 155 bar.

Dans cette partie, on se place en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergie mécanique.

On étudie l'évolution de la température entre le centre du combustible $\text{UO}_{2(s)}$ et l'eau du circuit primaire, qui circule dans l'espace annulaire de rayon allant de R_4 à R_5 et entourant les crayons. On suppose que la température du fluide caloporteur est une constante et vaut $T_5 = 303$ °C.

On note T_2 et T_3 les températures de part et d'autre de l'interface entre le combustible et la gaine. On note T_4 et T_5 les températures de part et d'autre de l'interface entre la gaine et le fluide caloporteur.

Pour simplifier, on néglige les effets de bord à chaque extrémité des cylindres ; on considère pour l'étude que les N crayons combustibles de hauteur H sont disposés les uns au-dessus des autres et que les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale.

Les échanges thermiques au niveau d'une interface sont modélisés selon la relation de Newton : la puissance thermique traversant une surface dS de cette interface s'écrit $h dS (T_s - T_a)$ où h désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et T_s et T_a désignent les températures de part et d'autre de l'interface.

Le coefficient de transfert conducto-convectif entre le combustible et la gaine vaut $h_2 = 10 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la gaine et le fluide caloporteur vaut $h_4 = 25 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

Chaque crayon est entouré d'une gaine d'épaisseur $e = R_4 - R_3 = 0,60 \text{ mm}$ dont la conductivité thermique vaut $\lambda_3 = 16 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

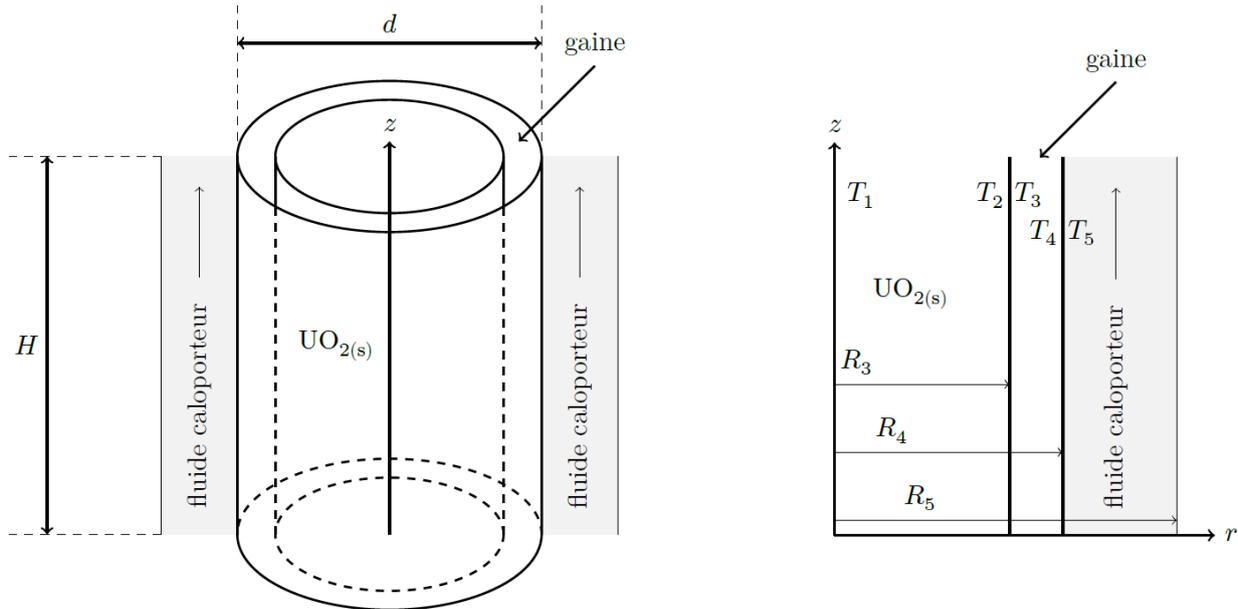


Figure 2

Q 1. Exprimer la surface latérale totale, notée S_{tot} , de l'ensemble des N crayons combustibles entourés de la gaine en fonction de N , d et H .

On note P_V la puissance thermique par unité de volume engendrée par les réactions de fission au cœur des crayons combustibles et que l'on suppose uniforme. On appelle r la distance à l'axe du cylindre modélisant l'ensemble des N crayons.

Q 2. Montrer que l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0.$$

Exprimer A en fonction de P_V et λ_2 .

Q 3. Exprimer la température $T(r)$ dans $\text{UO}_{2(s)}$ en fonction de P_V , T_2 , R_3 , λ_2 et r .

Q 4. Exprimer la température T_3 en fonction de T_2 , P_1 , h_2 , d , e , H et N .

Q 5. Exprimer la température $T(r)$ en un point de la gaine en fonction de T_4 , P_1 , R_4 , λ_3 , S_{tot} et r .

Q 6. Calculer les températures T_4 , T_3 , T_2 et T_1 .

Q 7. Représenter le profil température $T(r)$ pour $0 \leq r \leq R_5$.

Q 8. Expliquer pourquoi le bon fonctionnement du pressuriseur du circuit primaire fait partie des critères majeurs de sûreté. Proposer une solution pour pouvoir évacuer une puissance plus importante.

Formulaire

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z.$$

EXERCICE 4 : Anémométrie à fil chaud : bilan d'énergie dans le fil chaud

[Mines MP 2022]

L'anémométrie à fil chaud est une technique permettant de mesurer la vitesse d'écoulement d'un fluide. Elle est basée sur l'influence de la vitesse d'écoulement du fluide sur le transfert thermique conducto-convectif d'un solide conducteur plongé dans ce fluide.

Le système le plus couramment utilisé est un petit fil cylindrique, d'un diamètre typique d_w de l'ordre de quelques micromètres, parcouru par un courant et donc chauffé par effet Joule.

Ce petit fil est fixé à des broches d'alimentation par l'intermédiaire d'une gaine d'adaptation qui permet notamment l'alimentation du fil et de fixer la longueur active du fil, notée L_w qui est ici de l'ordre de quelques millimètres.

Quelques valeurs numériques concernant certaines caractéristiques physiques du fil chaud sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

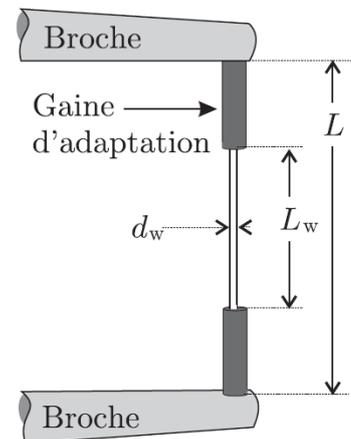


FIGURE 1 – Anémomètre

Matériau	Résistivité à 20°C : ρ_{20} [$\mu\Omega \cdot \text{cm}$]	Conductivité thermique : λ_w [$\text{W} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]	Masse volumique : μ_w [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] $\times 10^4$	Capacité thermique massique : c_w [$\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]
Tungstène	5,5	1,9	1,93	0,14
Platine	9,8	0,72	2,15	0,13
Platine-iridium	32	0,17	2,16	0,13

Les applications numériques seront réalisées avec au plus 2 chiffres significatifs.

Le fil conducteur (en tungstène par exemple) est parcouru par un courant électrique continu d'intensité I . Il est plongé dans un fluide en écoulement. On utilisera les notations suivantes :

- Caractéristiques du fil (que l'on repère avec l'indice « w » pour *wire* en anglais) : masse volumique μ_w , capacité thermique massique c_w , température T_w , résistivité (inverse de la conductivité) électrique ρ_w , conductivité thermique λ_w , longueur L_w et diamètre d_w .
- Caractéristiques du fluide (généralement de l'air que l'on repère lorsqu'il a ambiguïté avec l'indice « f » pour fluide) et de l'écoulement : masse volumique μ_f , viscosité η , température T_f , pression p_f , vitesse de l'écoulement \vec{V} . Ces caractéristiques sont supposées constantes pendant la mesure.

Si l'on note h le coefficient de transfert thermique conducto-convectif, la puissance thermique surfacique cédée par le fil au fluide à travers la surface S est donnée par la loi de Newton :

$$\frac{\delta \dot{Q}_f}{dS} = h (T_w - T_f) \quad (1)$$

On notera (Ox) l'axe du fil, ses extrémités étant situées en $x = -L_w/2$ et $x = +L_w/2$.

- – 1. Rappeler la loi d'Ohm locale. Définir les grandeurs intervenant dans cette loi et donner leurs unités usuelles. Établir l'expression de la résistance électrique totale, notée R_w , du fil en fonction de ρ_w , L_w et d_w .

En déduire la puissance \mathcal{P}_j dissipée par effet Joule dans le fil en fonction de ρ_w , L_w , d_w et I , puis la puissance volumique dissipée par effet Joule : $\mathcal{P}_v = \frac{d\mathcal{P}_j}{d\tau}$.

- – 2. Rappeler la loi de Fourier de la conduction thermique. Définir les grandeurs intervenant dans cette loi. On dit souvent qu'il s'agit d'une loi phénoménologique. Que cela signifie-t-il ? La température est supposée homogène sur chaque section du fil d'abscisse x . Que peut-on en déduire ?

Établir l'équation de diffusion thermique dans le cas d'un fil à la température $T(x,t)$ où seuls les transferts thermiques par conduction ont lieu.

On se place en régime permanent dans tout le reste de la partie I et on suppose la vitesse \vec{V} de l'écoulement uniforme et indépendant du temps. En plus des transferts thermiques par conduction, on prend en compte les transferts thermiques par conducto-convection et ceux provenant de l'effet Joule.

- – 3. Dans la loi de Newton (1), la grandeur h dépend de la vitesse \vec{V} de l'écoulement. Quelle est son unité ? Expliquer qualitativement comment varie h en fonction de $V = \|\vec{V}\|$. Expliquer alors comment évolue T_w quand V augmente.

- – 4. En effectuant un bilan énergétique sur un élément de volume de fil compris entre les abscisses x et $x + dx$, établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température $T_w(x,t)$.

La résistivité du fil dépend en fait de la température T_w de ce dernier. Expérimentalement, on mesure que si le fil est en contact avec un fluide à la température T_f , sa résistivité ρ_w vérifie la relation :

$$\rho_w = \rho_f [1 + \alpha (T_w - T_f)] \quad (2)$$

où ρ_f est sa résistivité à la température du fluide et $\alpha = 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ est un coefficient expérimental supposé constant. On note enfin $T_1(x) = T_w(x) - T_f$.

- – 5. Mettre l'équation obtenue à la question 4 sous la forme :

$$\frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} + K_1 T_1(x) + K_2 = 0 \quad (3)$$

Exprimer les constantes K_1 et K_2 en fonction de l'intensité I et des caractéristiques du fil, du fluide et de l'écoulement. On montrera, en particulier, que $\alpha K_2 = K_1 + 4h/(\lambda_w d_w)$.

Dans la plupart des anémomètres à fil chaud, K_1 est négatif. Déterminer la condition correspondante sur le coefficient conducto-convectif h . On se place dans ce cas dans toute la suite et on pose :

$$\ell_c = \frac{1}{\sqrt{|K_1|}}$$

On considère que le contact thermique assuré par les gaines d'adaptation entre les extrémités du fil et les broches de l'anémomètre (voir figure 1) se fait sans résistance thermique (contact parfait). Les broches et les gaines sont à la température T_f du fluide.

- – 6. Rappeler la définition d'une résistance thermique ainsi que son unité. Quelle est la conséquence d'un contact sans résistance thermique ?

Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (3).

En tenant compte des conditions aux limites dans le problème et de sa symétrie, montrer que $T_1(x)$ s'exprime assez simplement à partir de la fonction cosinus hyperbolique. En déduire l'expression du profil de température $T_w(x)$ dans le fil de la sonde en fonction de x , ℓ_c , K_2 , T_f et L_w .

- – 7. Déterminer la puissance thermique \dot{Q}_g cédée par le fil à l'ensemble des *deux* gaines d'adaptation en fonction de ℓ_c , K_2 , L_w , λ_w et d_w .