

I CCINP PC 2023 - Épreuve de modélisation - Etude des performances thermiques du Kairlin

I.1 Etude analytique du régime permanent

1. La température ne dépend que de x s'il y a invariance par translation selon \vec{e}_y et \vec{e}_z : il faut donc que les dimensions du matériau selon \vec{e}_y et \vec{e}_z soient bien plus grandes que la dimension L .

Remarque : Cela revient à considérer que le matériau est infini selon \vec{e}_y et \vec{e}_z .

2. L'équation de la diffusion thermique sans source interne à 3D est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{\text{isolant}}}{\rho c_p} \Delta T$$

Avec une modélisation unidimensionnelle selon x :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_{\text{isolant}}}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{I.1})$$

3. L'énoncé indique que :

$$T(t > 0, x = 0) = T_{\text{int}} \quad T(t, x = L) = T_{\text{ext}} \quad T(t = 0, x > 0) = T_{\text{ext}} \quad T(t = 0, x = 0) = T_{\text{int}}$$

4. En régime stationnaire, l'équation (I.1) devient :

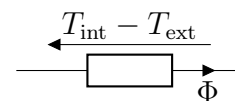
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$$

Avec les conditions aux limites précédentes, on en déduit que :

$$T(x) = T_{\text{int}} + \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{int}}}{L} x \quad (\text{I.2})$$

5. Par analogie avec l'électrocinétique, on définit, dans le cas d'un matériau où le flux thermique se conserve, la résistance thermique par :

$$R_{th} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{\Phi}$$



Le flux thermique étant une grandeur orientée, il est indispensable de définir le sens positif dans lequel vous le considérez dans votre définition.

En utilisant la loi de Fourier et en nommant S la section selon \vec{e}_y et \vec{e}_z du matériau, on détermine que :

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda_{\text{isolant}} S}$$

Remarque : La consigne étant "donner la formule", il n'est a priori pas utile de la redémontrer.

On peut supposer, au vu de l'unité dans la Q. 6, que ce que l'énoncé nomme "résistance thermique surfacique" est

$$r_{th} = R_{th} \times S = \frac{L}{\lambda_{\text{isolant}}}$$

6. On a :

$$L = \lambda_{\text{isolant}} r_{th} = \boxed{0.12 \text{ m}}$$

ce qui semble acceptable pour un isolant thermique.

I.2 Etude numérique du régime transitoire

7. Pour la diffusion thermique :

$$k_{th} = \frac{\lambda_{\text{isolant}}}{\rho c_p}$$

Remarque : Oui, on a déjà donné cette réponse à la Q.2...

8. Il y a N_x intervalles spatiaux. Donc :

$$dx = \frac{L}{N_x} \quad \text{et} \quad x_i = i \times dx = i \times \frac{L}{N_x}$$

Remarque : L'énoncé ne précise pas si le premier point est le point 0 ou le point 1, mais au vu de la numérotation de la figure 3, il faut considérer que le 1er point est le point 0.

9.

$$T(t + dt, x) = T(t, x) + \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$T(t, x - dx) = T(t, x) - \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (dx)^2$$

$$T(t, x + dx) = T(t, x) + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} (dx)^2$$

10. On en déduit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T(t, x + dx) - 2T(t, x) + T(t, x - dx)}{(dx)^2}$$

11.

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(dx)^2}$$

12. Avec l'équation de la diffusion et la Q.11 :

$$T_i^{n+1} = T_i^n + k_{th} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dt$$

Puis, avec la Q.11, on aboutit à :

$$T_i^{n+1} = k_{th} dt \left(\frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(dx)^2} \right) + T_i^n$$

13. Avec la question Q.7 : [Instruction 1] : Lambda/(Rho*Cp)

14. Dans l'équation 2, il faut pouvoir définir T_{i+1}^n et T_{i-1}^n : il faut donc éliminer les positions $i = 0$ et $i = N_x$. Les températures en ces points sont déterminées avec les conditions aux limites.

15. Avec la Q.8 : [Instruction 2.1] : L/N_X

De même : [Instruction 2.2] : t_max/N_t

16. Dans l'algorithme, Temp est un tableau contenant sur chaque ligne, les températures à un instant, et en chaque colonne, les températures en une position (cf. initialisation du tableau avec np.zeros). Donc, avec la Q.3 :

[Instruction 3.1] : T_int

[Instruction 3.2] : Temp[0,i]=T_ext

[Instruction 3.3] : Temp[n,0]=T_int

[Instruction 3.4] : Temp[n,N_X]=T_ext

17. En utilisant les questions Q.12 et Q.14 :

[Instruction 4.1] : range(0,N_t)

[Instruction 4.2] : range(1,N_X)

[Instruction 4.3] : Temp[n+1,i]=K*dt*(Temp[n,i+1]+Temp[n,i-1]-2*Temp[n,i])/(dx**2)+Temp[n,i]

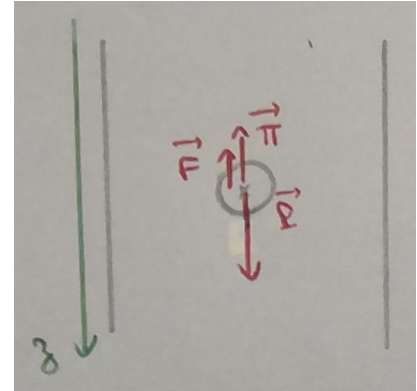
18. La courbe 3 coïncide avec la condition initiale : Courbe 3 : instant $t = 0$ s

On en déduit que : Courbe 1 : $t = 6000$ s et Courbe 4 : $t = 12000$ s et Courbe 2 : $t = 18000$ s

19. La courbe 2 correspond à un profil affine de la température, ce qui correspond au régime permanent qui est atteint (cf. Q.4).

II CCINP PSI 2022 - Décantation statique dans le traitement des eaux

14. • Système : {particule polluante} de masse $m = \rho_0 \times \frac{4}{3}\pi r^3$
 • Référentiel du bassin supposé galiléen



Principe fondamental de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = +mg\vec{e}_z - \rho_e \times \frac{4}{3}\pi r^3 g\vec{e}_z - 6\pi\eta r \vec{v} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_0 - \rho_e)g\vec{e}_z - 6\pi\eta r \vec{v}$$

Régime permanent :

En régime permanent, la vitesse atteinte vérifie donc :

$$\vec{0} = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_0 - \rho_e)g\vec{e}_z - 6\pi\eta r \vec{v}_l \iff \boxed{\vec{v}_l = \frac{2(\rho_0 - \rho_e)gr^2}{9\eta} \vec{e}_z}$$

Comme $\rho_0 > \rho_e$, $\boxed{v_l > 0}$: ceci est cohérent, les particules chutent dans le bassin.

Régime transitoire :

On peut réécrire l'équation différentielle comme :

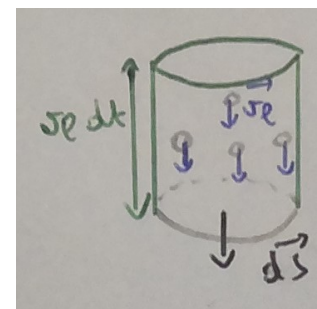
$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau_c} \vec{v} = \frac{v_l}{\tau_c} \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \tau_c = \frac{2\rho_0 r^2}{9\eta}$$

15. Par définition d'un vecteur densité de courant de particules, le nombre de particules traversant une surface orientée élémentaire $d\vec{S}$ pendant dt est $\delta N = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt$. Donc, $j(z)$ s'exprime en $m^{-2} s^{-1}$.

Expression de \vec{j} :

En ne considérant que le phénomène de convection, toutes les particules traversant $d\vec{S}$ pendant dt sont dans un cylindre de volume $\delta\tau = dS \times v_l dt$. Donc, $\delta N = n(z) \times dS \times v_l dt$. Par identification :

$$\boxed{\vec{j} = n(z) \vec{v}_l}$$



16. Loi de Fick :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = -D \frac{dn}{dz} \vec{e}_z$$

Unités : \vec{j}_D s'exprime en $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$, D en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ et n en m^{-3} .

Cette loi phénoménologique n'est valable que si la densité particulaire ne varie pas trop rapidement dans l'espace, dans le temps et n'est pas trop élevée.

Analyse de la situation proposée :

La densité particulaire n'étant pas uniforme, un courant de diffusion existe. Du fait de la convection, la densité particulaire est plus importante au fond du bassin, donc le courant de diffusion est ascendant.

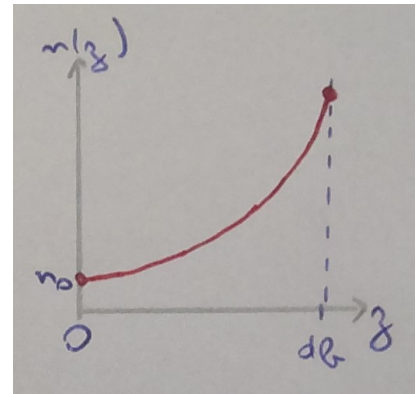
17. En régime permanent, $\vec{j} + \vec{j}_D = \vec{0}$. D'après les Q. 15 et Q. 16 :

$$n(z)v_l - D \frac{dn}{dz} = 0 \iff \frac{dn}{dz} - \frac{v_l}{D} n(z) = 0$$

En utilisant la condition à la limite en $z = 0$, on aboutit à :

$$n(z) = n_0 e^{+\frac{v_l}{D} z}$$

On retrouve bien que la densité particulaire est plus importante au fond du bassin de décantation.

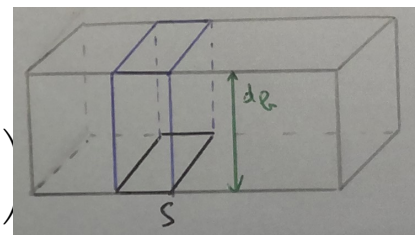


18.

Bien s'appropriier là où veut nous emmener l'énoncé : il ne s'agit pas de faire un bilan de particules comme on en a l'habitude. En effet, on doit faire un bilan sur une tranche verticale du bassin. Or, aucune particule ne rentre ou ne sort de cette tranche verticale (les particules ont un mouvement vertical). Donc, ici, on nous demande juste de compter le nombre de particules dans une tranche verticale de section S du bassin.

Considérons une tranche verticale de section S du bassin. Le nombre de particules dans cette tranche est, d'après la question précédente :

$$N = \iiint_{(V)} n(z) d\tau = S \times \int_0^{d_b} n(z) dz = S n_0 \frac{D}{v_l} \left(e^{+\frac{v_l}{D} d_b} - 1 \right)$$



Or, l'eau polluée arrive initialement dans le bassin avec une densité particulaire uniforme N_0 . Il doit donc y avoir dans la tranche verticale $N = N_0 \times S d_b$ particules.

Ainsi, par conservation du nombre de particules :

$$N0 S d_b = S n_0 \frac{D}{v_l} \left(e^{+\frac{v_l}{D} d_b} - 1 \right) \iff n_0 = \frac{N0 d_b v_l}{D \left(e^{+\frac{v_l}{D} d_b} - 1 \right)}$$

19. Le temps de sédimentation est le temps caractéristique de chute dans le bassin en ne prenant en compte que le phénomène convectif (cf. définition de l'énoncé dans le paragraphe après la Q.14). Donc,

$$\tau_s = \frac{d_b}{v_l}$$

Le temps caractéristique de diffusion sur la hauteur du bassin est, d'après l'évaluation en ordre de grandeur de l'équation de la diffusion de particules :

$$\tau_D = \frac{d_b^2}{D}$$

20. Ainsi :

$$n_0 = N0 \frac{\tau_D}{\tau_s \left(e^{\frac{\tau_D}{\tau_s}} - 1 \right)}$$

L'eau sera clarifiée si la densité particulaire au sommet du bassin n_0 est bien plus faible que la densité particulaire en amont du bassin de décantation $N0$: $n_0 \ll N0$.

Remarque : Dans l'idéal, il faudrait $n_0 = 0$ (plus aucune particule polluante en haut du bassin), mais ceci n'est pas possible.

Cette condition sera vérifiée dès que $\tau_D \gg \tau_s$: c'est cohérent, la sédimentation s'effectuera très rapidement devant la diffusion, donc la sédimentation prendra le dessus.

Remarque : En pratique, comme l'exponentielle croit très vite, pour avoir $N0/n_0 \geq 100$, il suffit d'imposer $\tau_D \geq 7\tau_s$.

III Centrale 1 PSI 2024 - Évolution de la température autour d'un combustible nucléaire

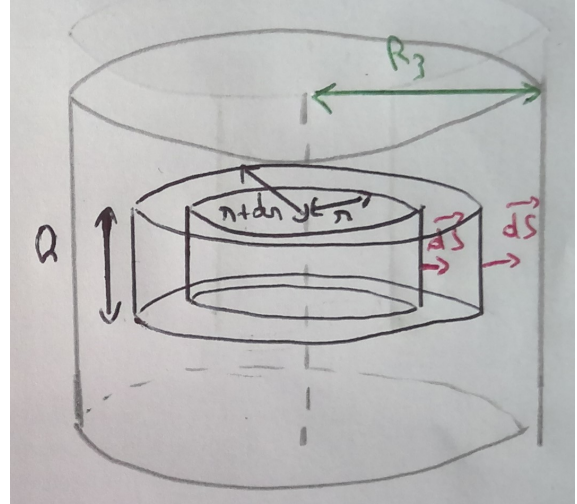
1. La surface latérale totale est : $S_{tot} = N \times \pi dH$.

2. Modélisation : Coordonnées cylindriques. Régime stationnaire avec terme source. $r \leq R_3$.

Les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale : le vecteur densité de courant thermique s'écrit : $\vec{j}_Q = j_Q(r, \theta, z) \vec{e}_r$. Par invariance par rotation d'angle θ et en négligeant les effets de bord : $\vec{j}_Q = j_Q(r) \vec{e}_r$.

On applique le premier principe au système entre r et $r + dr$ (cf. schéma) et entre t et $t + dt$:

$$d^2U = \delta^2Q_{\text{éch}} + \delta^2Q_{\text{créé}}$$



Variation temporelle : En régime stationnaire, $d^2U = 0$.

Echanges spatiaux :

$$\begin{aligned} \delta^2Q_{\text{éch}} &= \delta^2Q_{\text{entrant}}(r) - \delta^2Q_{\text{sortant}}(r + dr) \\ &= \left(\iint_{(S)_{\text{enr}}} \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} \right) dt - \left(\iint_{(S)_{\text{enr}+dr}} \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} \right) dt \\ &= 2\pi h dt (j_Q(r)r - j_Q(r + dr)(r + dr)) \\ &= -2\pi h dt dr \frac{dr j_Q(r)}{dr} \end{aligned}$$

En utilisant la loi de Fourier et le formulaire : $\vec{j}_Q = -\lambda_2 \overrightarrow{\text{grad}}(T) \Rightarrow j_Q(r) = -\lambda_2 \frac{dT}{dr}$

Donc :

$$\delta^2Q_{\text{éch}} = 2\pi h \lambda_2 dt dr \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right)$$

Création interne :

$$\delta^2Q_{\text{créé}} = P_V dt \times 2\pi r dr h$$

Bilan :

$$0 = 2\pi h \lambda_2 dt dr \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + P_V dt \times 2\pi r dr h \iff \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0$$

avec $A = \frac{P_V}{\lambda_2}$

3. En intégrant deux fois cette équation, avec α et β des constantes d'intégration :

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{P_V}{2\lambda_2} r^2 + \alpha$$

$$T(r) = -\frac{P_V}{4\lambda_2} r^2 + \alpha \ln(r) + \beta$$

Conditions aux limites :

- En $r = 0$, non divergence de la température : $\alpha = 0$
- En $r = R_3$, $T(R_3) = -\frac{P_V}{4\lambda_2} R_3^2 + \beta = T_2$

Donc :

$$T(r) = T_2 + \frac{P_V}{4\lambda_2} (R_3^2 - r^2) \quad \text{pour } r < R_3$$

On vérifie bien que la température décroît avec r .

4. En régime stationnaire, par continuité du flux au niveau de l'interface, la puissance thermique traversant la surface latérale en $r = R_3$ est égale à la puissance totale créée dans le cœur combustible P_1 .

Remarque : On peut également le voir en calculant le flux thermique sortant en $r = R_3^-$:


$$\Phi(r = R_3^-) = -\lambda_2 \frac{dT}{dr} \times N \times 2\pi R_3 H = P_V N \pi R_3^2 H = P_V \times \mathcal{V}_{\text{combustible}} = P_1$$

Ainsi, en intégrant la loi de Newton sur la surface latérale, le flux thermique sortant en $r = R_3$ vaut :

$$h_2(T_2 - T_3) \times N \times 2\pi R_3 H = P_1 \iff T_3 = T_2 - \frac{P_1}{h_2 N \times 2\pi R_3 H}$$

En utilisant $e = R_4 - R_3 = \frac{d}{2} - R_3 \iff R_3 = \frac{d}{2} - e$:

$$T_3 = T_2 - \frac{P_1}{h_2 N \times 2\pi H \left(\frac{d}{2} - e \right)}$$

5.  Dans la gaine, il n'y a plus de terme de création de puissance thermique.

Dans la gaine, l'équation de la diffusion thermique est donc simplement $\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$. En intégrant deux fois cette équation, avec γ et ε des constantes :

$$T(r) = \gamma \ln(r) + \varepsilon$$

Conditions aux limites :

- En $r = R_4$: $T(R_4) = \gamma \ln(R_4) + \varepsilon = T_4$
- En $r = R_3$: Vu qu'on ne doit pas exprimer $T(r)$ en fonction de T_3 mais de P_1 , l'idée est d'utiliser une condition sur le flux. Par continuité du flux thermique sortant de la surface latérale en $r = R_3^+$:

$$\Phi(r = R_3^+) = -\lambda_3 \frac{dT}{dr}(R_3) \times N \times 2\pi R_3 H = -\lambda_3 \gamma N \times 2\pi H = P_1 \iff \gamma = -\frac{P_1}{2\pi N H \lambda_3}$$

On fait apparaître S_{tot} (cf. Q.1) :

$$\gamma = -\frac{P_1 d}{2S_{tot} \lambda_3} = -\frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3}$$

Finalement :

$$T(r) = T_4 + \frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3} (\ln(R_4) - \ln(r)) = T_4 + \frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3} \ln\left(\frac{R_4}{r}\right)$$

Si r augmente, T diminue : cohérent.

6. Il reste à trouver la relation entre T_4 et T_5 : elle est donnée par la loi de Newton. La puissance thermique sortant de la surface latérale en $r = R_4$ est :

$$h_4(T_4 - T_5) \times N \times 2\pi R_4 H = P_1 \iff T_4 = T_5 + \frac{P_1}{2\pi N R_4 H h_4}$$

A.N. : $T_4 = 328^\circ\text{C}$

D'après la Q.5,

$$T_3 = T_4 + \frac{P_1 R_4}{S_{tot} \lambda_3} \ln\left(\frac{R_4}{R_3}\right)$$

A.N. : $T_3 = 352^\circ\text{C}$

D'après la Q.4 :

$$T_2 = T_3 + \frac{P_1}{h_2 N \times 2\pi H \left(\frac{d}{2} - e\right)}$$

A.N. : $T_2 = 422^\circ\text{C}$

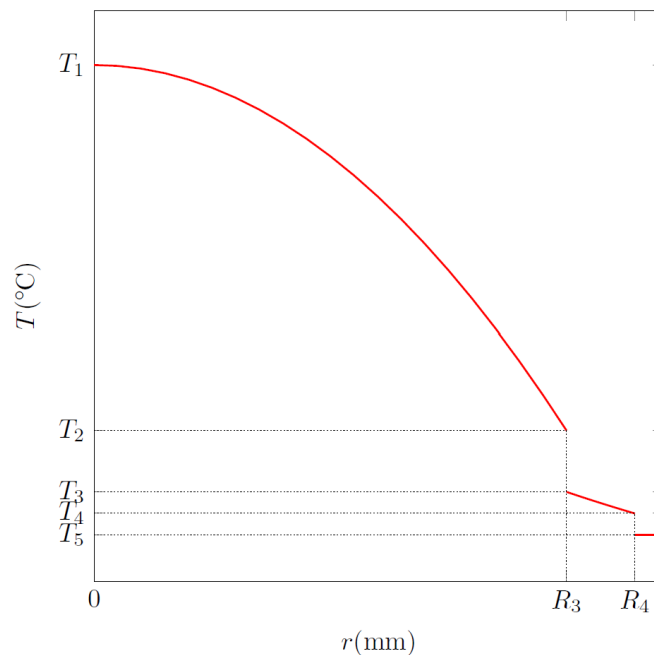
D'après la Q.3 :

$$T_1 = T_2 + \frac{P_V}{4\lambda_2} R_3^2$$

A.N. : $T_1 = 838^\circ\text{C}$

Remarque : D'un point de vue pragmatique, il vaut mieux sauter cette question pour un devoir en temps limité. D'ordinaire, je vous conseille de faire les A.N. car elles sont vraiment très rentabilisées, mais ici, elles sont longues à faire et dépendent des réponses à toutes les questions précédentes.

7. .



8. Si le pressuriseur du circuit primaire est défectueux et que la pression du fluide caloporteur diminue, alors la température de vaporisation de l'eau diminue aussi (cf. diagramme $P - T$). Le souci est que si T_5 devient supérieur à la température de vaporisation, alors l'eau du circuit primaire se vaporise : il en résulte une mauvaise évacuation de la puissance thermique dégagée par le combustible (baisse du coefficient h_4 , perturbation des pompes de circulation...). Dans ce cas, les températures dans le combustible et la gaine augmentent, pouvant conduire à une vaporisation de celles-ci.

Pour évacuer une puissance plus importante, on peut augmenter la vitesse de circulation du fluide caloporteur (ce qui revient à augmenter h_4), mais tout en ne diminuant pas la pression du fluide caloporteur (ce qui n'est pas si simple à réaliser techniquement).

IV Mines Physique 1 MP 2022 - Anémométrie à fil chaud : bilan d'énergie dans le fil chaud

1. Loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\vec{j} = \frac{1}{\rho_w} \vec{E}}$$

avec \vec{j} le vecteur densité de courant électrique (en $A m^{-2}$), ρ_w la résistivité électrique du fil (en Ωm) et \vec{E} le champ électrique (en $V m^{-1}$).

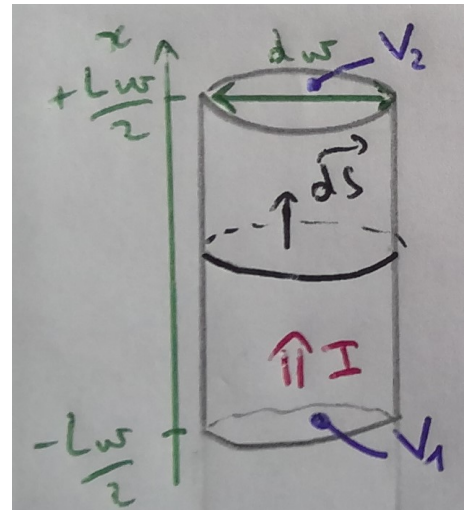
Résistance électrique totale du fil :

Modélisation : Régime stationnaire. Conduction électrique uniquement axiale : $\vec{j} = j(r, \theta, x) \vec{e}_x$. \vec{j} constant sur une section droite d'abscisse x : $\vec{j} = j(x) \vec{e}_x$.

Calcul du courant I :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(x) \times \pi \frac{d_w^2}{4} \iff j(x) = \frac{4I}{\pi d_w^2} = \frac{1}{\rho_w} E$$

avec la loi d'Ohm locale où $\vec{E} = E \vec{e}_x$.



Calcul de la différence de potentiels $V_1 - V_2$: Comme $\vec{E} = \overrightarrow{cste}$, on a :

$$V_1 - V_2 = EL_w = \frac{4I\rho_w L_w}{\pi d_w^2}$$

Calcul de la résistance R_w : En convention récepteur :

$$R_w = \frac{V_1 - V_2}{I} = \boxed{\frac{4\rho_w L_w}{\pi d_w^2} = R_w}$$

Effet Joule :

La puissance totale dissipée par effet Joule est donc

$$\boxed{\mathcal{P}_J = R_w I^2 = \frac{4\rho_w L_w I^2}{\pi d_w^2}}$$

La puissance volumique, uniforme, est donc :

$$\mathcal{P}_v = \frac{\mathcal{P}_J}{\pi \frac{d_w^2}{4} L_w} = \boxed{\frac{16\rho_w I^2}{\pi^2 d_w^4} = \mathcal{P}_v}$$

Remarque : On peut vérifier qu'on retrouve le même résultat en appliquant la formule du cours :

$$\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \rho_w \left\| \vec{j} \right\|^2 = \rho_w \left(\frac{I}{S} \right)^2$$

2. Loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q = -\lambda_w \overrightarrow{\text{grad}}(T)$$

avec \vec{j}_Q le vecteur densité de courant thermique, λ_w la conductivité thermique et T la température. Une loi phénoménologique est une loi déterminée expérimentalement sans preuve théorique, et qui est donc valable dans certaines conditions (température variant faiblement dans l'espace et dans le temps ici).

Comme la température ne dépend que de x et de T , on en déduit que $\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x$.

Donc, d'après la loi de Fourier, $\boxed{\vec{j}_Q = j_Q(x) \vec{e}_x}$.

Equation de la diffusion thermique (seule la conduction thermique est considérée, i.e. pas d'effet Joule et pas de conducto-convection (cf. paragraphe entre Q.2 et Q.3 de l'énoncé)) :

1er principe à la portion de fil (phase condensée incompressible et indilatable) entre les abscisses x et $x + dx$, entre t et $t + dt$:

$$d^2U = \delta^2Q_{\text{éch}}$$

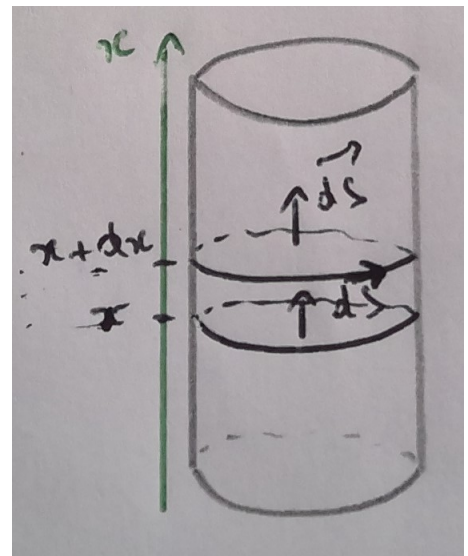
Variation temporelle :

$$d^2U = (\delta m) (u(x, t + dt) - u(x, t))$$

$$\text{avec } \delta m = \mu_w d\tau = \mu_w \times \frac{\pi d_w^2 dx}{4}$$

et $u(x, t)$ l'énergie interne massique

$$\begin{aligned} \Rightarrow d^2U &= \mu_w \frac{\pi d_w^2 dx}{4} \frac{\partial u}{\partial t} dt \\ &= \mu_w \frac{\pi d_w^2}{4} \times c_w \frac{\partial T}{\partial t} dx dt \end{aligned}$$



Echanges spatiaux :

$$\begin{aligned} \delta^2Q &= \left(\iint_{(S) \text{ en } x} \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} \right) dt - \left(\iint_{(S) \text{ en } x+dx} \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} \right) dt \\ &= (j_Q(x) - j_Q(x + dx)) \times \frac{\pi d_w^2}{4} dt \\ &= \lambda_w \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \times \frac{\pi d_w^2}{4} dt \end{aligned}$$

avec la loi de Fourier.

Bilan : En ré-injectant dans le 1er principe :

$$\mu_w \frac{\pi d_w^2}{4} \times c_w \frac{\partial T}{\partial t} dx dt = \lambda_w \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \times \frac{\pi d_w^2}{4} dt \iff \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda_w}{\mu_w c_w} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

3. D'après la loi de Newton, h s'exprime en $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$. Quand V augmente, la puissance transférée du fil vers le fluide augmente, donc h augmente. Donc, quand V augmente, les pertes thermiques de la part du fil augmentent et T_w diminue.

4. **Remarque** : Légère incohérence du sujet : on se place désormais en régime permanent : $T_w(x)$.
On cherche donc une équation différentielle ordinaire.

1er principe à la portion de fil (phase condensée incompressible et indilatable) entre les abscisses x et $x + dx$, entre t et $t + dt$:

$$d^2U = 0 = \delta^2Q_{\text{éch}} + \delta^2Q_{\text{Joule}} - \delta^2Q_f$$

Echanges spatiaux : De même qu'à la Q.2 :

$$\delta^2Q_{\text{éch}} = \lambda_w \frac{d^2T_w}{dx^2} dx \times \frac{\pi d_w^2}{4} dt$$

Création interne d'énergie thermique par effet Joule : D'après la Q.1 :

$$\begin{aligned} \delta^2Q_{\text{Joule}} &= \mathcal{P}_v \times \frac{\pi d_w^2}{4} dx dt \\ &= \frac{4\rho_w I^2}{\pi d_w^2} dx dt > 0 \end{aligned}$$

Pertes thermiques par conducto-convection :

$$\delta^2Q_f = h(T_w(x) - T_f) \times \pi d_w dx dt > 0$$

Bilan :

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_w \frac{d^2T_w}{dx^2} dx \times \frac{\pi d_w^2}{4} dt + \frac{4\rho_w I^2}{\pi d_w^2} dx dt - h(T_w(x) - T_f) \times \pi d_w dx dt \\ \Rightarrow &\boxed{\frac{d^2T_w}{dx^2} + \frac{16\rho_w I^2}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w} - h(T_w(x) - T_f) \frac{4}{d_w \lambda_w} = 0} \end{aligned}$$

5. Comme $T_f = \text{cste}$, on ré-écrit l'équation précédente :

$$\begin{aligned} \frac{d^2T_1}{dx^2} + \frac{16I^2}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w} \rho_f (1 + \alpha T_1(x)) - \frac{4h}{d_w \lambda_w} T_1(x) &= 0 \\ \Rightarrow &\boxed{\frac{d^2T_1}{dx^2} + K_1 T_1(x) + K_2 = 0} \end{aligned}$$

avec

$$\boxed{K_1 = \frac{16I^2}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w} \rho_f \alpha - \frac{4h}{d_w \lambda_w}} \quad \text{et} \quad \boxed{K_2 = \frac{16I^2}{\pi^2 d_w^4 \lambda_w} \rho_f}$$

On remarque bien que $K_1 = \alpha K_2 - \frac{4h}{d_w \lambda_w}$, ce qui revient à la forme demandée dans l'énoncé.

On a :

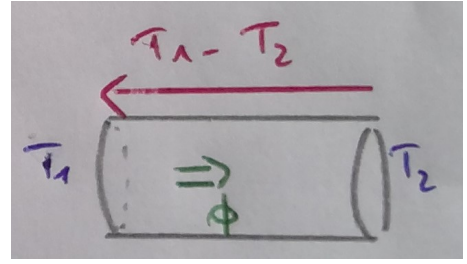
$$K_1 < 0 \iff \boxed{h > \frac{4I^2 \rho_f \alpha}{\pi^2 d_w^3}}$$

6. Résistance thermique :

Par analogie avec la conduction électrique, on définit une résistance thermique (en convention récepteur) par :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi}$$

avec Φ le flux thermique. R_{th} s'exprime en $\underline{\text{KW}^{-1}}$.



Si $R_{th} = 0$, alors la différence de températures entre les extrémités du solide est nulle, quelque soit le flux thermique Φ (c'est un contact parfait) (équivalent d'un interrupteur fermé en électrocinétique).

Solution générale :

- L'équation homogène $\frac{d^2 T_1}{dx^2} + K_1 T_1(x) = 0$ a pour solution : $T_1(x) = A \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + B \sinh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)$ avec A et B des constantes.

Remarque : De manière équivalente, on peut proposer la forme suivante pour la solution générale : $T_1(x) = \alpha e^{\frac{x}{\ell_c}} + \beta e^{-\frac{x}{\ell_c}}$. La résolution est alors un peu plus longue, mais on aboutit à la même solution finale.

- Solution particulière : Par exemple, $T_1(x) = -\frac{K_2}{K_1} = K_2 \ell_c^2$

Donc, la solution générale s'écrit :

$$T_1(x) = A \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + B \sinh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + K_2 \ell_c^2$$

Conditions aux limites :

En $x = \pm \frac{L_w}{2}$, on a $T_w(x) = T_f \iff T_1(x) = 0$. Ainsi, le problème est symétrique par rapport à l'abscisse $x = 0$. Nécessairement, la solution $T_1(x)$ doit être symétrique par rapport à $x = 0$: $T_1(x)$ doit être une fonction paire.

Remarque : Il s'agit en fait d'une conséquence du principe de Curie.

Nécessairement, $B = 0$ et $T_1(x) = A \cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right) + K_2 \ell_c^2$. On détermine aussi A :

$$A \cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right) + K_2 \ell_c^2 = 0 \iff A = -\frac{K_2 \ell_c^2}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)}$$

Ainsi :

$$\boxed{T_1(x) = K_2 \ell_c^2 \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} \right)} \iff \boxed{T_w(x) = T_f + K_2 \ell_c^2 \left(1 - \frac{\cosh\left(\frac{x}{\ell_c}\right)}{\cosh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)} \right)}$$

7. Par symétrie, la puissance cédée aux deux gaines $\dot{Q}_g = 2 \times \Phi$ où Φ est la puissance cédée par le fil à une seule gaine (disons, à la gaine du haut). En utilisant la loi de Fourier et en orientant \vec{dS} du fil vers la gaine :

$$\Phi = \iint_{(S) \text{ en } L_w/2} \vec{j}_Q \cdot \vec{dS} = -\lambda_w \frac{dT_w}{dx}(x = L_w/2) \times \frac{\pi d_w^2}{4} = \frac{\lambda_w \pi d_w^2}{4} K_2 \ell_c \tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)$$

Donc :

$$\boxed{\dot{Q}_g = \frac{\lambda_w \pi d_w^2}{2} K_2 \ell_c \tanh\left(\frac{L_w}{2\ell_c}\right)}$$