

I E3A-Polytech PC 2022 - Un modèle simplifié de sismo-graphe

1. Le coefficient λ modélise les interactions entre la tige reliée à la masse et le fluide présent dans l'amortisseur, et caractérise donc une force résistive dans le référentiel \mathcal{R}' du boîtier.

Unité de λ : kg s^{-1}

2. • Système : {Masse m }
- Référentiel \mathcal{R}' supposé galiléen

A l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_r$$

avec $\vec{P} = mg\vec{u}_{Z'} - k(\ell_1 - \ell_0)\vec{u}_{Z'}$



Comme d'habitude avec un ressort, le point délicat est le signe \pm devant l'expression de la force. Réfléchir sur le schéma en supposant que $\ell_1 > \ell_0$.

Après projection sur $\vec{u}_{Z'}$:

$$\ell_1 = \ell_0 + \frac{mg}{k} > \ell_0$$

ce qui est cohérent.

3. Dans un référentiel \mathcal{R}' non galiléen, deux forces d'inertie sont à considérer :
- la force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e$ avec \vec{a}_e l'accélération d'entraînement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R}
 - la force d'inertie de Coriolis : $\vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c = \vec{0}$ avec \vec{a}_c l'accélération de Coriolis de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , nulle dans le cas d'une translation
4. • Système : {Masse m }
- Référentiel \mathcal{R} galiléen
- Référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à \mathcal{R}

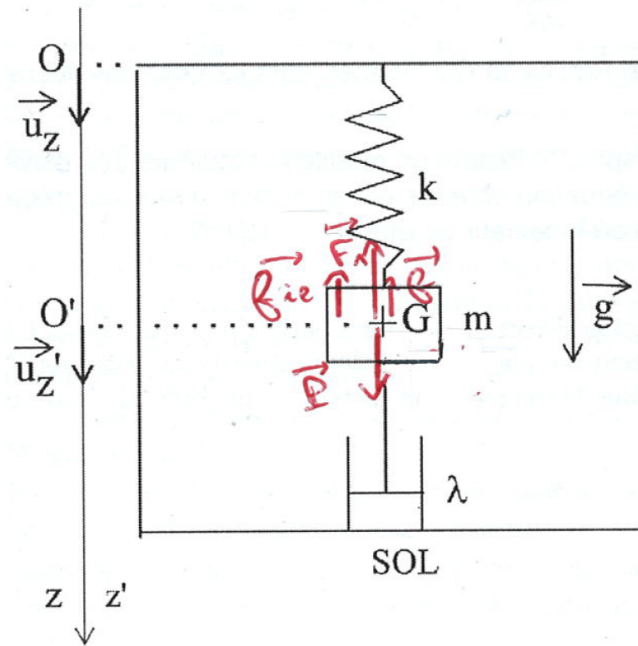
Bilan des forces dans \mathcal{R}' :

• Poids : \vec{P}

• Force de frottements : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}(G)_{/\mathcal{R}'}$

• Force de rappel du ressort : $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{Z'}$ avec ℓ la longueur du ressort

- Force d'inertie d'entrainement : \vec{f}_{ie}



5. Calculons l'accélération d'entrainement :

$$\vec{a}_e = \vec{a}(\text{boitier})_{/R} = \frac{d^2 z_S}{dt^2} \vec{u}_{z'} = -E_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi) \vec{u}_{z'}$$

Principe fondamental de la dynamique :

$$m \vec{a}(G)_{/R'} = mg \vec{u}_{z'} - \lambda \vec{v}(G)_{/R'} - k(\ell - \ell_0) \vec{u}_{z'} + m E_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi) \vec{u}_{z'}$$

En projection sur $\vec{u}_{z'}$:

$$m \frac{d^2 z'_G}{dt^2} = mg - k(\ell - \ell_0) - \lambda \frac{dz'_G}{dt} + m E_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi)$$



On n'a terminé la simplification. En effet, l'énoncé précise que la position de O' est choisie pour coïncider avec la position d'équilibre en l'absence de mouvement du sol (lien avec la Q.2) : cela va nous permettre d'éliminer le $\ell - \ell_0$ (c'est une démarche classique quand il y a un ressort).

Or, $mg - k(\ell - \ell_0) = -k(\ell - \ell_1) = -kz_{G'}$ (d'après la Q.2 et la définition de $z_{G'}$). Donc :

$$m \frac{d^2 z'_G}{dt^2} = -kz_{G'} - \lambda \frac{dz'_G}{dt} + m E_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi)$$

6. ω_0 est la pulsation propre et Q est le facteur de qualité. On ré-écrit l'équation précédente :

$$\frac{d^2 z'_G}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dz'_G}{dt} + \frac{k}{m} z_{G'} = E_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi)$$

En identifiant :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{\lambda} \sqrt{km}$$

7. Si le facteur de qualité est infini, alors on obtient :

$$\boxed{\frac{d^2 z'_G}{dt^2} + \omega_0^2 z_{G'} = E_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi)}$$

On reconnaît une équation d'oscillateur harmonique en régime sinusoïdal forcé.

8. (a) *Différentes méthodes sont possibles. La plus simple est ici d'injecter directement la solution proposée dans l'équation différentielle.*

On obtient :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) Z_m \cos(\omega t + \Phi') = E_m \omega^2 \cos(\omega t + \Phi)$$

Ceci devant être vrai pour tout t du régime permanent, on identifie les amplitudes :

$$|\omega_0^2 - \omega^2| Z_m = E_m \omega^2 \iff \boxed{Z_m = \frac{E_m \omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} > 0}$$

(b) *On étudie le cas général. Donc, on prend du recul : on étudie un régime sinusoïdal forcé (cf. le second membre de l'équation donnée en Q6) : notation complexe !*

On passe en notation complexe : $\underline{z}_{G'} = Z_m e^{j(\omega t + \Phi')} = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$. L'équation différentielle de la Q.6 devient :

$$-\omega^2 \underline{Z}_m + j \frac{\omega_0 \omega}{Q} \underline{Z}_m + \omega_0^2 \underline{Z}_m = E_m \omega^2 e^{j\Phi} \iff \underline{Z}_m = \frac{E_m \omega^2 e^{j\Phi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega_0 \omega}{Q}}$$

On trouve l'amplitude en prenant le module de \underline{Z}_m :

$$\boxed{Z_{m, \text{ non idéal}} = |\underline{Z}_m| = \frac{E_m \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2}}$$

On vérifie bien que si Q tend vers l'infini, on retrouve le résultat de la question précédente.

9. On observe une divergence de Z_m pour $\omega = \omega_0$: on reprend donc l'expression valable dans le cas d'un facteur de qualité infini. On peut alors ré-écrire :

$$Z_m = \frac{E_m u^2}{|1 - u^2|}$$

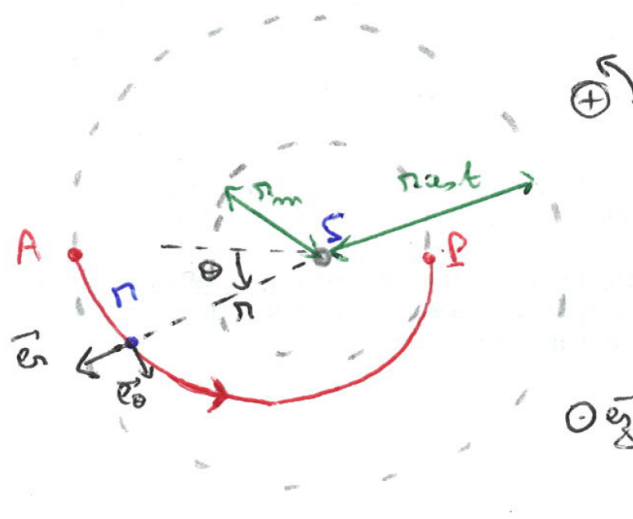
- Pour $u \ll 1$, $Z_m \simeq E_m u^2$, ce qui est cohérent avec l'allure parabolique quand $u \ll 1$.
- Pour $u \rightarrow 1$, Z_m diverge : cohérent.
- Pour $u \gg 1$, $Z_m \simeq E_m$, ce qui est à nouveau cohérent.

10. En $u = 1$, il y a résonance du système.

L'objectif d'un sismographe est d'enregistrer les variations d'amplitude de vibration du sol, donc d'être sensible à E_m . On souhaite donc qu'il fonctionne dans la zone où $Z_m \simeq E_m$: le sismographe s'utilise dans la zone III.

Par exemple, les amortisseurs des moyens de transport (voiture, vélo, etc) fonctionnent dans la zone I : on souhaite en effet que Z_m reste environ nul, malgré les aspérités de la route.

II Centrale PC 2024 - Transfert d'un astéroïde de la ceinture d'astéroïdes vers Mars



35.

- 36.
- Système : {Point matériel M }.
 - Référentiel lié au centre de force, appelé O , supposé galiléen.
 - On appelle \vec{F} la force centrale conservative.

Conservation du moment cinétique :

Théorème du moment cinétique en O :

$$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \mathcal{M}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Donc, le moment cinétique en O se conserve :

$$\boxed{\vec{L}_O(M) = \text{cste}}$$

Conservation de l'énergie mécanique :

Théorème de l'énergie mécanique : $\Delta E_m = 0$ car \vec{F} est conservative. Donc :

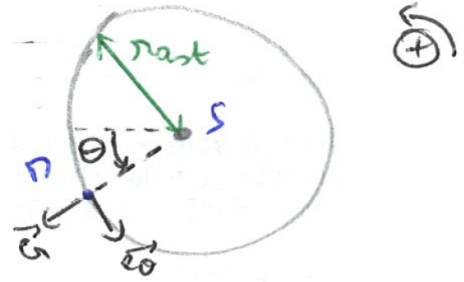
$$\boxed{E_m = \text{cste}}$$

37. .

- Système : {Astéroïde M }.
- Référentiel héliocentrique, supposé galiléen.
- Coordonnées polaires de centre S :

$$\overrightarrow{SM} = r_{ast} \vec{e}_r \quad \vec{v} = r_{ast} \dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = r_{ast} \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r_{ast} \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$



Principe fondamental de la dynamique (PFD) :

$$m_p \vec{a} = -\frac{Gm_s m_p}{r_{ast}^2} \vec{e}_r$$

En projection selon \vec{e}_r :

$$m_p r_{ast} \dot{\theta}^2 = \frac{Gm_s m_p}{r_{ast}^2} \Rightarrow \frac{v^2}{r_{ast}} = \frac{Gm_s}{r_{ast}^2} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m_p v^2 = \frac{Gm_p m_s}{2r_{ast}}$$

L'énergie potentielle est : $E_p = -\frac{Gm_s m_p}{r_{ast}}$. Donc finalement :

$$E_{m1} = -\frac{Gm_p m_s}{2r_{ast}} < 0$$

Signe cohérent : état lié de l'astéroïde (et non état de diffusion).

38. On a :

$$\overrightarrow{SM} = r \vec{e}_r \quad \boxed{\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta} \quad \boxed{\vec{L} = \overrightarrow{SM} \wedge m_p \vec{v} = m_p r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z}$$

On appelle constante des aires $C = r^2 \dot{\theta}$. Donc : $\boxed{\vec{L} = m_p C \vec{e}_z}$.

Comme $\vec{L} = \text{cste}$, on a $C = \text{cste}$.

39. On en déduit que l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2} m_p \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} m_p (\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) = \frac{1}{2} m_p \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m_p \frac{C^2}{r^2}$$

L'énergie potentielle est : $E_p = -\frac{Gm_s m_p}{r}$. Donc l'énergie mécanique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m_p \dot{r}^2 + E_{eff}(r) \quad \text{avec} \quad E_{eff}(r) = \frac{1}{2} m_p \frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_s m_p}{r}$$

40. *Stratégie* : En lisant attentivement la question, on se rend compte que l'inconnu recherchée ici n'est pas tant E_m (on en a une formule sur toute la trajectoire de l'orbite de Hohmann), mais a . Donc, on cherche le demi-grand axe a . Pour cela, on sait que $2a = r_A + r_P$ avec r_A et r_P les rayons à l'aphélie et au périhélie. Donc, intéressons nous à A et P .

Aux points A et P, la distance r atteint un extremum : $\dot{r} = 0$. Donc l'énergie mécanique se simplifie en ces points A et P : $E_m = \frac{1}{2}m_p \frac{C^2}{r^2} - \frac{Gm_s m_p}{r}$. Cherchons les positions r vérifiant cette relation. On doit donc résoudre :

$$E_m r^2 + Gm_s m_p r - \frac{1}{2}m_p C^2 = 0$$

Le discriminant Δ est positif. Donc, il y a bien deux racines réelles :

$$r = -\frac{Gm_s m_p}{2E_m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2E_m}$$

Remarque : Pas de souci sur le signe, car $E_m < 0$ (état lié).

Ces expressions de r sont valables en A et P. Donc :

$$r_A + r_P = 2a = -\frac{Gm_s m_p}{E_m} \iff \boxed{E_m = -\frac{Gm_s m_p}{2a}}$$

Remarque : On vérifie que c'est bien la même relation que celle obtenue en Q.37 en remplaçant r_{ast} par a (résultat de sup').

41. Avec le schéma, on remarque que $2a < 2r_{ast} \iff a < r_{ast}$. En faisant attention au signe – dans les expressions de l'énergie mécanique des Q. 37 et Q. 40, on en déduit que l'énergie mécanique de l'astéroïde diminue.

Remarque : Donc, la vitesse de l'astéroïde doit être diminuée au point A pour le faire basculer sur la trajectoire de Hohmann.

42. Au point A, lors de la brusque variation de la vitesse de l'astéroïde, l'énergie potentielle ne varie pas ($r = \text{cste}$). Donc :

$$E_{m1} - E_m = E_{c1} - E_c = \frac{1}{2}m_p (v_1^2 - v^2)$$

avec, d'après la Q.37, $v_1^2 = \frac{Gm_s}{r_{ast}}$ et d'après la Q.41, $v = v_1 - \Delta v$. Ainsi :

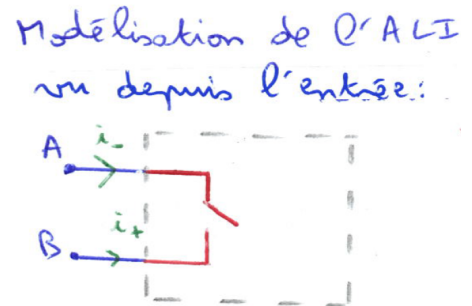
$$\begin{aligned} (v_1 - \Delta v)^2 &= \frac{Gm_s}{r_{ast}} + Gm_s \left(\frac{1}{r_{ast}} - \frac{1}{a} \right) = Gm_s \left(\frac{2}{r_{ast}} - \frac{1}{a} \right) \\ \Rightarrow \Delta v &= \sqrt{\frac{Gm_s}{r_{ast}}} - \sqrt{Gm_s \left(\frac{2}{r_{ast}} - \frac{1}{a} \right)} \end{aligned}$$

Enfin, $a = \frac{r_m + r_{ast}}{2}$. Donc :

$$\boxed{\Delta v = \sqrt{\frac{Gm_s}{r_{ast}}} - \sqrt{2Gm_s \left(\frac{1}{r_{ast}} - \frac{1}{r_m + r_{ast}} \right)} = 3.2 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}}$$

III CCINP PC 2024 - Epreuve de modélisation - Dispositif de charge d'une cellule électrochimique

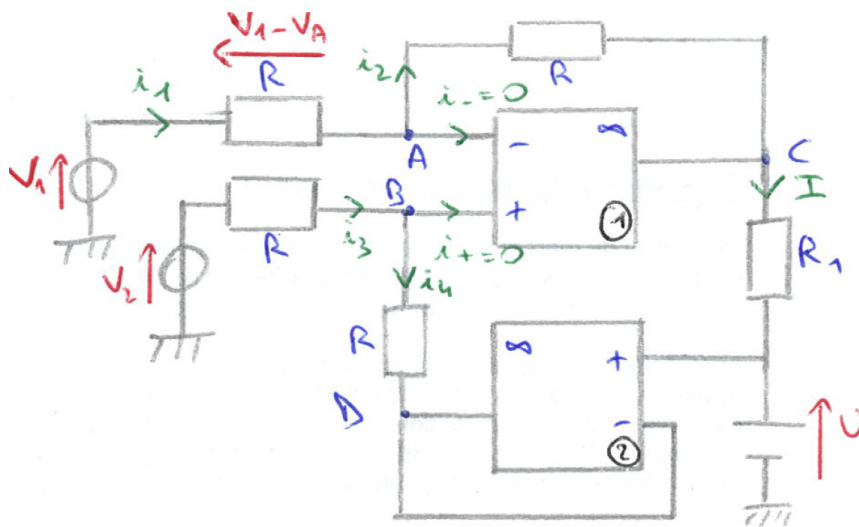
1. **ALI idéal** Une impédance infinie est équivalente à un interrupteur ouvert. Donc, le fait que l'impédance d'entrée de l'ALI soit infinie implique que les courants d'entrée sont nuls.



2. ALI idéal en régime linéaire

- (a) La rétroaction sur la borne inverseuse de l'ALI 1 (branche entre les nœuds C et A) indique que l'ALI 1 fonctionne probablement en régime linéaire.
- (b) Pour un ALI idéal en régime linéaire :

$$\boxed{V_A = V_B} \quad (III.1)$$



51. Loi des nœuds en A : $i_1 = i_- + i_2 = i_2$ car l'ALI 1 est idéal.

Avec des lois d'Ohm, on en déduit :

$$\frac{V_1 - V_A}{R} = \frac{V_A - V_C}{R} \iff \boxed{V_A = \frac{V_1 + V_C}{2}} \quad (III.2)$$



L'erreur classique ici est de se tromper sur la convention récepteur dans la loi d'Ohm.

52. L'ALI 2 est un ALI idéal fonctionnant en régime linéaire : $V_+ = V_-$. Ici, $V_+ = U$ et $V_- = V_D$.
Donc : $\boxed{V_D = U}$.

53. Loi des nœuds en B : $i_3 = i_+ + i_4 = i_4$ (ALI 1 idéal). Donc :

$$\frac{V_2 - V_B}{R} = \frac{V_B - U}{R} \iff \boxed{V_B = \frac{V_2 + U}{2}} \quad (\text{III.3})$$

54. Avec une loi d'Ohm : $\boxed{V_C = U + R_1 I}$

Avec les équations (III.1), (III.2) et (III.3) : $V_1 + V_C = V_2 + U$. Donc :

$$V_1 + R_1 I = V_2 \Rightarrow \boxed{I = \frac{V_2 - V_1}{R_1}}$$

I sera constant si V_1 et V_2 sont constants.

Remarque : On a donc ici un convertisseur tension - courant : le courant est imposé dans la cellule (peu importe la tension U !) et est contrôlé par des tensions.