

Sommaire

I	Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution ponctuelle de charges	3
I.1	Définition du champ électrique	3
I.2	Champ et potentiel créés par une charge ponctuelle unique	4
I.3	Principe de superposition	4
II	Symétries et invariances	5
II.1	Principe de Curie	5
II.2	Plans de symétrie et d'antisymétrie	5
II.3	Invariances	7
III	Topographie du champ électrostatique et potentiel électrostatique	7
III.1	Comment représenter graphiquement le champ électrique ?	7
III.2	Equation de Maxwell-Gauss (postulat)	8
III.3	Equation de Maxwell-Faraday (postulat)	10
III.4	Surfaces/courbes équipotentielles	11
III.5	Energie potentielle électrostatique	12
IV	Déterminer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges : exemple du dipôle électrostatique	12
IV.1	Modèle du dipôle électrostatique	12
IV.2	Quels sont le potentiel et le champ électrostatique créés par un dipôle électrostatique ?	14
IV.3	Comment évolue un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrique extérieur ?	15
IV.4	Application à la chimie	16
V	Déterminer le champ électrostatique créé par une distribution continue de charges	18
V.1	Théorème de Gauss	18
V.2	Utilisation du théorème de Gauss pour déterminer un champ électrique	19
V.3	Application : potentiel électrostatique créé par une boule uniformément chargée	21
V.4	Application : énergie de constitution d'un noyau atomique	22
V.5	Application : condensateur plan en électrostatique	23
VI	Analogie entre l'électrostatique et la gravitation	26

Questions de cours

- Symétries et invariances pour le champ électrostatique.
- Énoncer l'équation de Maxwell-Faraday en régime variable et la simplifier dans le cas de l'électrostatique. Citer les conséquences pour \vec{E} .
- Énoncer l'équation de Maxwell-Gauss et l'interpréter.
- Topographie du champ électrostatique : équipotentiels, lignes de champ, propriétés, exemples.
- Dipôle électrostatique : approximation dipolaire, moment dipolaire, expression du potentiel électrostatique, allure des équipotentiels et des lignes de champ.
- Dipôle électrostatique rigide dans un champ extérieur : à partir de l'expression de l'énergie potentielle du dipôle $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$, prévoir l'évolution du dipôle dans le champ. Application à la solvation des ions dans un solvant polaire.
- Présenter les différents types d'interactions électrostatiques pouvant exister entre des molécules. Définir la polarisabilité et en estimer un ordre de grandeur.
- Théorème de Gauss : énoncé et application à une distribution volumique au choix du colleur.
- Démontrer l'expression du champ électrique dans un condensateur plan (de manière complète !). En déduire l'expression de la capacité.
- Dans le cas du condensateur plan, démontrer l'expression de la densité volumique d'énergie électrique.
- Présenter l'analogie entre l'électrostatique et la gravitation. Appliquer le théorème de Gauss gravitationnel sur un exemple au choix.

Prise de notes : Que vous évoque l'électrostatique ? Exemples d'expériences d'ES dans le vie quotidienne : peigne en se coiffant, la décharge électrique au contact d'une voiture ou d'une personne, machine de Wimshurt, ballon frotté sur les cheveux qui tient sur un mur, etc.



Ce chapitre est consacré aux champs électrostatiques, c'est-à-dire aux champs électriques créés par des distributions stationnaires de charges électriques (nous étudierons dans des chapitres ultérieurs l'influence des courants, et le lien entre les champs électriques et magnétiques).

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Appliquer une méthode systématique pour déterminer les symétries et invariances du champ électrique.
2. Utiliser le principe de superposition pour calculer le champ électrique et le potentiel électrique créés par une distribution discrète de charges.
3. Utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ électrique créé par une distribution continue de charges.

Durant tout le thème d'électromagnétisme, sauf mention contraire explicite, nous nous placerons dans le cas où les charges électriques et les courants électriques sont dans le vide, ou autrement dit, dans le cas où les électrons des atomes ne viennent pas perturber les champs électriques et magnétiques produits.

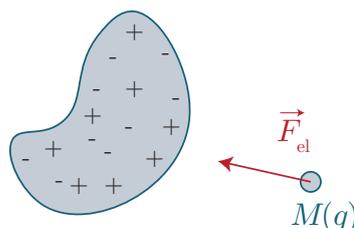
I Champ et potentiel électrostatiques créés par une distribution ponctuelle de charges

I.1 Définition du champ électrique

En physique classique, le champ électrique s'observe via ses effets sur une particule chargée (force de Coulomb). Néanmoins, suite aux travaux de Coulomb, en lien avec ceux de Newton sur la gravitation, la notion de champ électrique a été introduite pour expliquer les interactions à distance entre des corps chargés. Il s'agit d'une révolution conceptuelle en physique, car désormais, un "potentiel de force" préexiste en un point de l'espace, avant même de venir y placer une particule chargée.

L'intérêt est que, une fois que l'on connaît localement le champ électrique, on peut décrire entièrement les phénomènes électrostatiques qui s'y produisent sans avoir à faire appel à la description détaillée des sources de champ. Pour un champ électrique $\vec{E}(M)$, la force électrique qui s'exerce si on vient placer une charge q en M est alors simplement

$$\vec{F}(M) = q\vec{E}(M)$$



En physique, toutes les forces sont des grandeurs qui ne dépendent pas du choix d'orientation de l'espace (choix conventionnel du sens direct avec un trièdre de référence) : on dit que ce sont des *vecteurs polaires* ou un "*vrais vecteurs*" (par opposition aux "pseudo-vecteurs" ou vecteurs axiaux, qui dépend de l'orientation du sens direct). Comme on a un simple rapport de proportionnalité entre \vec{F} et \vec{E} , le *champ électrique est un vecteur polaire* également.



Le champ électrique s'exprime en V m^{-1} ou en N C^{-1} . Vous devez en connaître deux ordres de grandeurs :

Exemple	Ordre de grandeur
Ondes radio	10^{-1} V m^{-1}
Atmosphère par beau temps	$\heartsuit 10^1\text{-}10^2 \text{ V m}^{-1} \heartsuit$
Téléphone portable à 30 cm	25 V m^{-1}
Atmosphère par temps orageux	10^4 V m^{-1}
Champ disruptif de l'air	$\heartsuit 3 \times 10^6 \text{ V m}^{-1} \heartsuit$
Orbite de l'électron de l'atome d'hydrogène	$5 \times 10^{11} \text{ V m}^{-1}$

I.2 Champ et potentiel créés par une charge ponctuelle unique

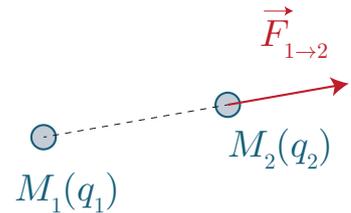
a Champ électrostatique

Considérons, comme système : {Charge q_2 placée en M_2 }.

La force s'exerçant sur la charge q_2 placée en M_2 du fait de la présence d'une charge q_1 en M_1 (Coulomb, 1785) s'écrit :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0(M_1 M_2)^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

avec $\vec{u}_{1 \rightarrow 2}$ un vecteur unitaire dirigé de M_1 vers M_2 et $\epsilon_0 \simeq 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ est la permittivité diélectrique du vide.



Ainsi, on peut définir d'après la force coulombienne le champ électrique créé en M_2 par la charge q_1 :

$$\vec{E}(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0(M_1 M_2)^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$$

On peut le réécrire par un choix de repère approprié : en se plaçant en coordonnées sphériques avec l'origine coïncidant avec la position de la charge q_1 :

$$\vec{E}(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Remarque : Le champ électrique n'est pas défini au niveau de la source ponctuelle, en $r = 0$.

b Potentiel électrostatique

ATTENTION : Je me questionne sur l'intérêt de dire ça maintenant, plutôt que de le donner plus tard, une fois qu'on aura montré que $\vec{E} = -\text{grad}(V)$...

La force de Coulomb $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ s'exerçant sur le système dérive d'une énergie potentielle : $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\text{grad}(E_{p,1 \rightarrow 2})$. En reprenant le repère sphérique précédemment défini, on aboutit à :

$$E_{p,1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En première année, il a été admis que le potentiel électrostatique $V(M_2)$ généré par la charge q_1 au point M_2 était relié à l'énergie potentielle par : $E_{p,1 \rightarrow 2} = q_2 V(M_2)$. Le potentiel électrostatique s'exprime en Volt. On en déduit que le potentiel électrostatique créé par la charge ponctuelle q_1 s'écrit :

$$V(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r}$$

I.3 Principe de superposition

Pour une distribution de charges ponctuelles quelconques, on peut simplement additionner les forces liées à chaque source de champ électrique : $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i q \vec{E}_i = q \vec{E}$. Le champ élec-

trique vérifie donc le *principe de superposition* : le champ électrostatique total créé par plusieurs charges est la somme des champs électrostatiques créés par chacune des charges

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$$

Par exemple pour N charges ponctuelles q_i placées en M_i , le champ électrique au point M s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0(M_iM)^3} \overrightarrow{M_iM}$$

Il en va de même pour le potentiel électrostatique :

$$V(M) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0(M_iM)}$$

II Symétries et invariances

II.1 Principe de Curie

La plupart des phénomènes en physique vérifient un principe de symétrie énoncé initialement par Pierre Curie et appelé le principe de Curie :

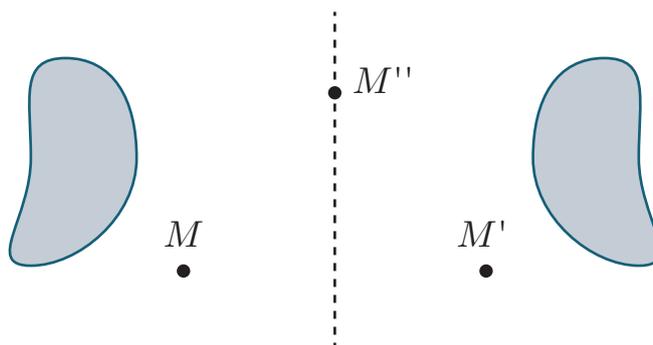
Dans une expérience de physique, lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets peuvent être plus symétriques que les causes.

Dans notre cas, il faut donc étudier les symétries d'une distribution de charge, cause du champ électrique : le champ électrique vérifiera les mêmes propriétés de symétrie.

II.2 Plans de symétrie et d'antisymétrie

a Plans de symétrie

Le cas le plus simple est celui d'un plan de symétrie pour une distribution de charge. Il y a à la fois symétrie dans la position et dans les valeurs de charges de part et d'autre d'un plan Π_S (noté également Π^+) :

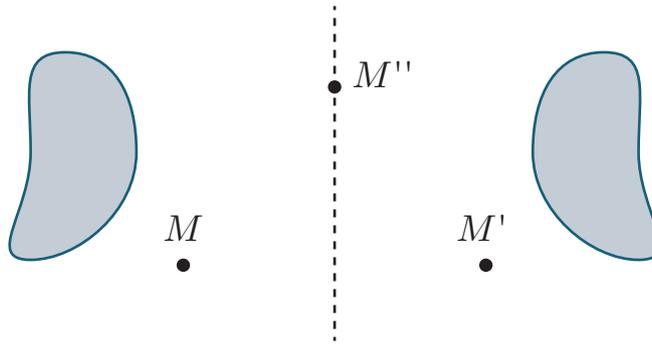


Ainsi pour un plan de symétrie :

- si $M' = Sym_{\Pi_S}(M)$, $\vec{E}(M') = Sym_{\Pi_S}(\vec{E}(M))$;
- ★ • pour un point M'' appartenant au plan de symétrie, $\vec{E}(M'')$ doit être son propre symétrique, c'est-à-dire que *le champ électrique en point d'un plan de symétrie est contenu dans ce plan.*

b Plans d'antisymétrie

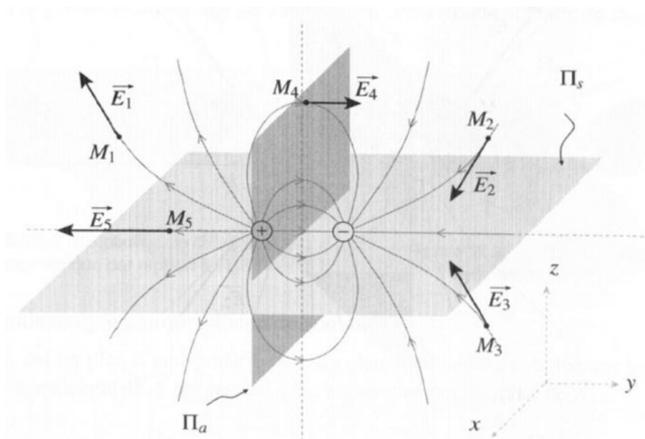
Un plan d'antisymétrie pour une distribution de charge Π_A (aussi noté Π^-) est un plan de symétrie des positions des charges, mais le signe des charges est inversé :



Ainsi pour un plan d'antisymétrie :

- si $M' = \text{Sym}_{\Pi_A}(M)$, $\vec{E}(M') = -\text{Sym}_{\Pi_A}(\vec{E}(M))$;
- ★ pour un point M'' appartenant au plan d'antisymétrie, le champ doit être son propre antisymétrique : $\vec{E}(M'') = -S_{\Pi_A}(\vec{E}(M''))$. *Le champ électrique en un point d'un plan d'antisymétrie est orthogonal à ce plan.*

Exercice : Sur l'exemple ci-dessous, retrouver les propriétés de symétrie et antisymétrie :



c Exemples

Les symétries et antisymétries permettent de déterminer l'orientation du champ électrique. C'est donc particulièrement utile lorsqu'on souhaite préparer un calcul de champ électrique, afin de se ramener généralement à une seule direction en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

Fiche-méthode : Utiliser les symétries et antisymétries pour \vec{E}

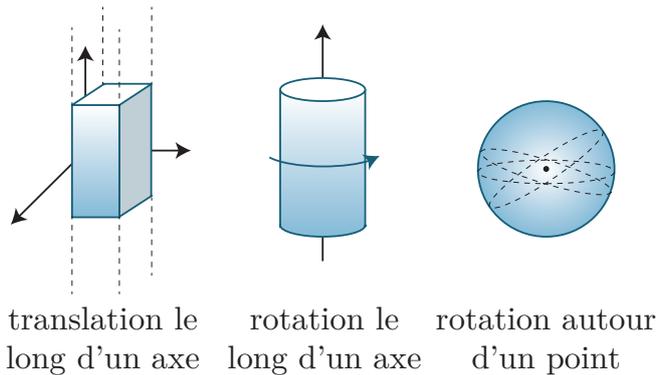
- ★ 1. Choisir un point M **quelconque** : on cherche la direction de \vec{E} en ce point.
- 2. Lister les plans de symétries ou d'antisymétries **passant par ce point**.
- 3. En déduire la direction de \vec{E}

Traitons quelques exemples :

- le plan infini en $z = 0$, uniformément chargé, pour lequel on néglige les effets de bords. Pour un point M quelconque de l'espace, les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge, donc \vec{E} appartient à l'intersection et est donc selon \vec{e}_z , $\vec{E} = E_z(x, y, z)\vec{e}_z$;
- un cylindre de rayon R , uniformément chargé, d'axe de révolution (Oz) et infiniment long : comme $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution. Ainsi $\vec{E} = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r$;
- le même type de cylindre, mais non infiniment long, implique que pour un point M quelconque, seul le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan de symétrie, et donc $\vec{E} = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$;
- une boule uniformément chargée centrée en O et de rayon R : les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie : $\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$.

★

II.3 Invariances



Lorsqu'on étudie une distribution de charge, sa forme nous indique le choix de la base appropriée à l'étude. *Chaque invariance de la distribution se traduit alors par la disparition d'une variable pour le champ électrique.*

Exercice : Reprendre les exemples qui précèdent et en déduire la forme sous laquelle rechercher le champ électrique.

★

1. pour le plan infini, invariance par translation selon \vec{e}_x et \vec{e}_y , donc $\vec{E} = E_z(z)\vec{e}_z$;
2. pour le cylindre infini, invariance par translation selon \vec{e}_z et par rotation d'angle θ , donc $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$;
3. pour le cylindre de longueur finie, on a toujours l'invariance par rotation, mais on n'a plus l'invariance par translation selon \vec{e}_z , donc $\vec{E} = E_r(r, z)\vec{e}_r + E_z(r, z)\vec{e}_z$;
4. enfin pour la boule chargée uniformément en volume, on a complète invariance par rotation autour du point O , donc $\vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$.

III Topographie du champ électrostatique et potentiel électrostatique

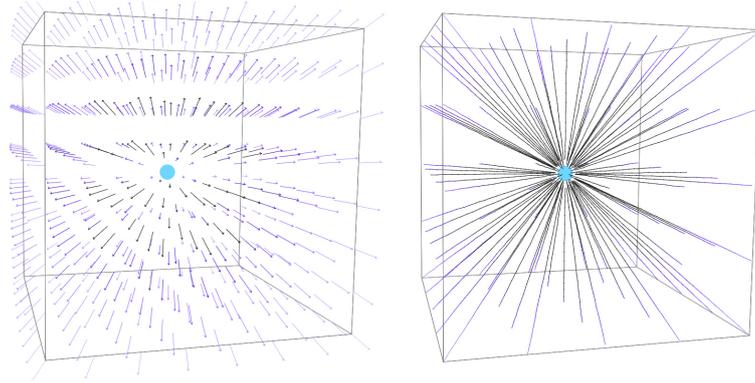
III.1 Comment représenter graphiquement le champ électrique ?

A une carte de champ de vecteur, on préfère couramment représenter les lignes de champ. Pour rappel, il s'agit de courbes orientées, tangentes en tout point au champ électrique, et orientées dans le sens du champ.

On peut déterminer leurs équations :

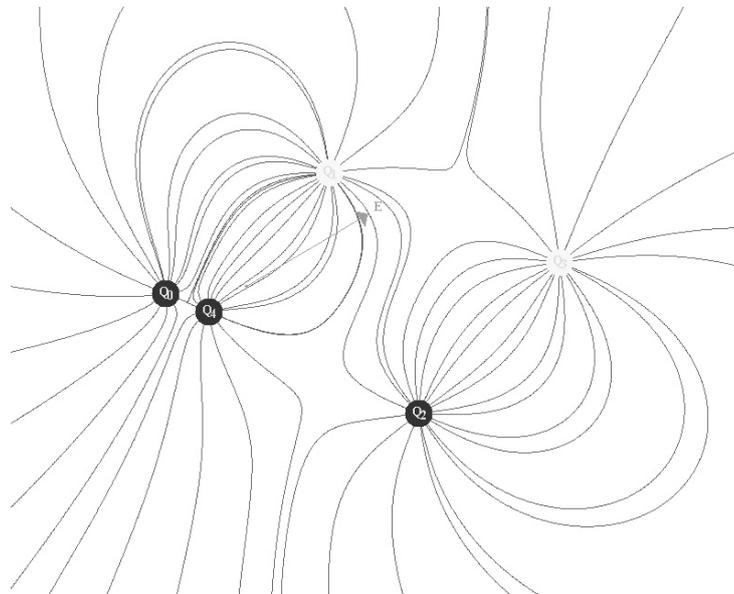
$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{r} = \vec{0}$$

Pour le champ créé par une charge ponctuelle unique, les lignes de champ sont des demi-droites issues de O , divergentes si la charge est positive, et convergentes sinon :



Remarque : C'est cohérent, car $\vec{e}_r \wedge (d r \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi) = \vec{0}$ conduit à $d\theta = d\varphi = 0$, c'est-à-dire des portions de droites passant par l'origine.

En considérant un exemple avec plusieurs charges :



Quelques propriétés sont à noter :

- ★ • si des lignes de champ différentes se coupent en un point, il y a deux possibilités : soit une charge ponctuelle se trouve au croisement ; soit en l'absence de charges, le champ électrique est nul (seul le vecteur nul peut être tangent à deux courbes différentes en un même point) ;
- les lignes de champ vont toujours d'une charge vers une autre charge, ou vers (ou depuis) l'infini ;
- les lignes de champ électrique ne sont jamais bouclées sur elles-mêmes : *elles ne sont pas fermées.*

Nous allons désormais relier ces propriétés topographiques à des équations locales faisant intervenir les opérateurs différentiels.

III.2 Equation de Maxwell-Gauss (postulat)

On prend comme postulats de l'électromagnétisme, un ensemble de lois locales appelées lois de Maxwell, dont voici la première :

Equation de Maxwell-Gauss

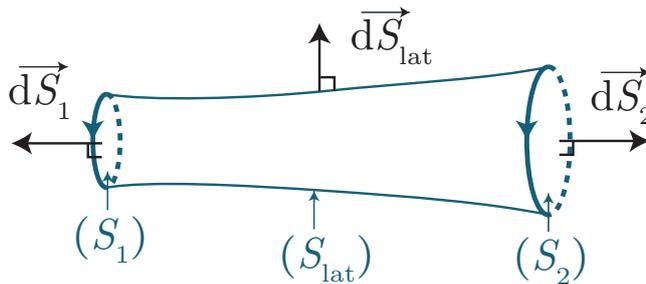
L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit :

$$\star \quad \operatorname{div}(\vec{E}(M)) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$

avec ρ la densité volumique de charges (en C m^{-3}) et $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide.

Interprétations :

1. Cette loi relie le champ \vec{E} à sa source : la densité volumique de charges. C'est donc elle qui permet (implicitement) de calculer le champ \vec{E} créé par des charges.
2. Comme cette équation est linéaire, on peut utiliser le théorème de superposition pour déterminer le champ électrique.
3. Le fait que \vec{E} soit un vecteur symétrique par rapport à un plan de symétrie de la distribution de charges ou antisymétrique par rapport à un plan d'antisymétrie de la distribution de charges est associé au fait que l'opérateur div est un opérateur dit symétrique.
4. Sur une carte de champ, on repère une source de champ de signe positive ($\rho > 0$) si le champ \vec{E} a tendance à diverger à partir de ce point ($\operatorname{div}(\vec{E}) > 0$). Si le champ \vec{E} a tendance à converger en un point, il s'agit d'une source de champ de signe négative.
5. Dans une région vide de charge, où $\rho = 0$, le champ électrique vérifie donc $\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$, c'est-à-dire que le vecteur \vec{E} est à flux conservatif. En particulier, si on considère un tube de champ, le flux du champ électrique est constant à travers une section droite du tube de champ :



En effet,

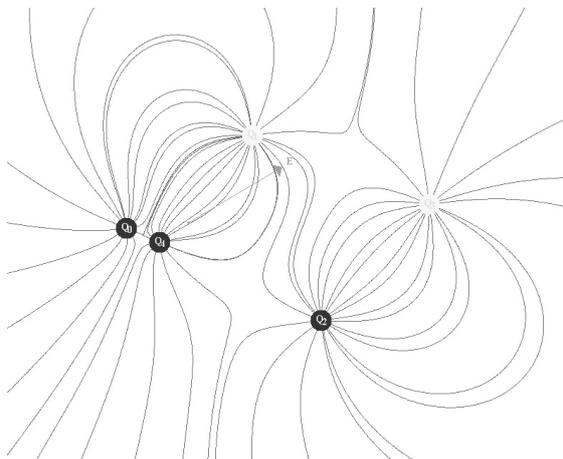
$$\iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 + \underbrace{\iint_{(S_{lat})} \vec{E} \cdot \vec{dS}_{lat}}_{=0} = 0 \iff \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot (-\vec{dS}_1) = \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot \vec{dS}_2 \quad (\text{III.1})$$

avec $-\vec{dS}_1$ le vecteur surface élémentaire orienté dans le sens entrant par rapport au tube de champ. En particulier, si on note E_1 et E_2 les normes moyennes du champ électrique sur les sections S_1 et S_2 , on trouve en ordre de grandeur

$$E_1 S_1 \sim E_2 S_2 \iff \frac{E_1}{E_2} \sim \frac{S_2}{S_1} \quad (\text{III.2})$$

Evolution de la norme de \vec{E} sur une carte de champ

- \star Dans un régime vide de charges, le champ électrique est plus intense là où les lignes de champ se resserrent, c'est-à-dire là où les tubes de champs se rétrécissent.



III.3 Equation de Maxwell-Faraday (postulat)

Voici la deuxième équation de Maxwell, aussi prise comme postulat de l'électromagnétisme :

Equation de Maxwell-Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\star \quad \text{rot}(\vec{E}(M)) = -\frac{\partial \vec{B}(M)}{\partial t}$$

avec \vec{B} le champ magnétique.

En électrostatique, cette loi se simplifie en :

$$\star \quad \text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

Interprétations :

1. On dit que le champ \vec{E} est irrotationnel. En conséquence, il existe une fonction scalaire V telle que :

$$\star \quad \vec{E} = -\text{grad}(V)$$

La fonction V s'appelle le potentiel scalaire électrique.

2. La différence de potentiels entre deux points A et B peut se ré-écrire comme une circulation du champ électrique :

$$V(A) - V(B) = \int_B^A dV = \int_B^A \text{grad}(V) \cdot \vec{dr} = - \int_A^B \text{grad}(V) \cdot \vec{dr} = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dr}$$

3. La circulation du champ électrique sur un contour fermé est nulle :

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{dr} = 0$$

Il est donc impossible que les lignes de champ \vec{E} soient bouclées sur elles-mêmes.

Retour sur le potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle q :

On se place en coordonnées sphériques, d'origine la charge ponctuelle q .

Connaissant le champ électrostatique d'après la loi de Coulomb $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, on peut désormais démontrer directement l'expression du potentiel.

$$\star \quad \vec{E} \cdot \vec{dr} = -dV \iff \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -dV$$

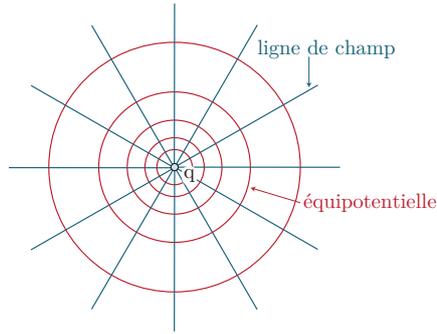
donc

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + cste$$

★ et l'on considère par convention que le potentiel électrique à l'infini est nul, donc

$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Les surfaces équipotentielles sont telles que $V(M) = cste$, c'est-à-dire des surfaces pour lesquelles $r = cste$: ce sont des sphères concentriques de centre O .

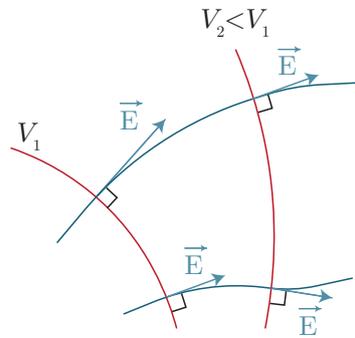


III.4 Surfaces/courbes équipotentielles

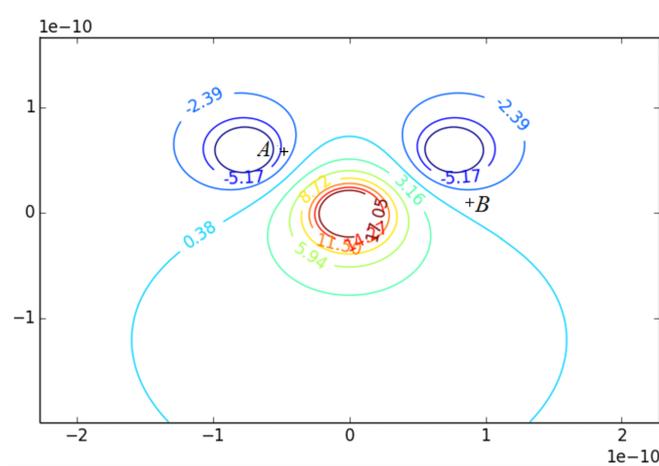
On peut compléter la topographie du champ électrostatique en y ajoutant la notion d'équipotentielle, correspondant aux courbes (en 2D) ou aux surfaces (en 3D) vérifiant $V(M) = cste$.

Revoyons quelques propriétés que l'on a déjà rencontrées lors du cours sur le gradient, étant donné la définition $\vec{E}(M) = -\text{grad}(V)(M)$:

- en tout point M de l'espace, le champ électrique $\vec{E}(M)$ est orthogonal à la surface équipotentielle passant par ce point M ;
- les lignes de champ sont donc orthogonales aux surfaces équipotentielles ;
- le champ électrique est orienté dans le sens des potentiels décroissants.



Exercice : Une modélisation de la molécule d'eau donne la carte d'équipotentielles ci-dessous :



Toutes les grandeurs sont indiquées en unités SI. Représenter les lignes de champ électrique et estimer la norme du champ électrique au point A .

★ Les lignes de champ \vec{E} sont orthogonales aux équipotentielles. Pour estimer la norme au point A, on considère les deux équipotentielles entourant A, distantes d'environ 8×10^{-12} m (produit en croix avec l'échelle horizontale). Ainsi

$$\|\vec{E}(A)\| = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)(A) \simeq \frac{\partial V}{\partial x}(A) \Rightarrow E(A) \simeq \frac{\Delta V}{\Delta x} \simeq \frac{5.17 - 2.39}{8e - 12} \simeq 3 \times 10^{11} \text{ V m}^{-1}$$

III.5 Energie potentielle électrostatique

On cherche l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle q que l'on vient placer dans un champ électrique extérieur \vec{E} . On calcule le travail élémentaire que reçoit la charge ponctuelle :

$$\star \quad \delta W_{\text{el}} = \vec{F}_{\text{el}} \cdot \vec{dr} = q\vec{E} \cdot \vec{dr} = -q \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot \vec{dr} = -qdV = -dE_p$$

La fonction E_p existe donc bien et s'exprime : $E_p = qV \underbrace{+ \text{cste}}_{=0(\text{convention})}$

Energie potentielle électrostatique

L'énergie potentielle d'une charge ponctuelle q placée dans un champ électrique extérieur de potentiel V vaut :

$$E_p = qV$$

Exercice (de sup) : Un électron est émis par un filament de tungstène avec une vitesse négligeable. Il est alors accéléré entre deux électrodes soumises à une tension $U = 5$ V. Déterminer la vitesse finale de l'électron. On donne la masse de l'électron $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg.

Schéma avec le sens de la tension $U > 0$. TEC à l'électron de charge $-e$ dans le référentiel du labo galiléen :

$$\star \quad \Delta E_c = \frac{1}{2} m_e v_f^2 - 0 = -\Delta E_p = -(-e)(V_2 - V_1) = eU \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

A.N. $v_f = 1.3 \times 10^6$ m/s $\ll c$: OK (électron non relativiste)

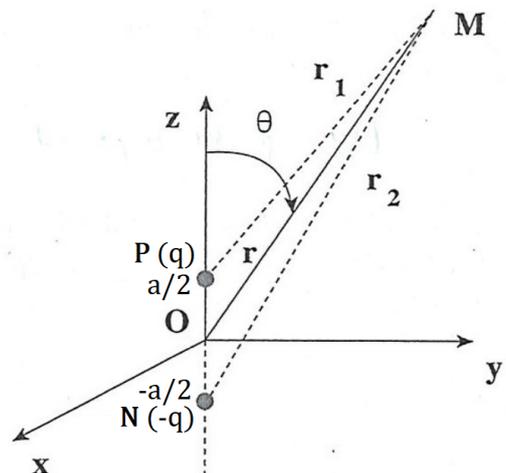
IV Déterminer le champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges : exemple du dipôle électrostatique

IV.1 Modèle du dipôle électrostatique

Définition : Dipôle électrostatique

Ensemble de deux charges ponctuelles opposées $+q$ et $-q$ distantes de a , dont on étudie le champ à une distance d'observation r bien plus grande que a : $r \gg a$.

Sur le schéma, on se place en coordonnées sphériques, de centre le milieu des points N et P.



Définition : Moment dipolaire

$$\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$$



avec N la position de la charge $-q$ et P celle de la charge $+q$. Unité : C m.
Le dipôle électrostatique est entièrement caractérisé par son moment dipolaire (comme nous le verrons par la suite).

Intérêt pratique du modèle du dipôle électrostatique

Considérons une distribution de charges, discrète ou continue. On peut alors définir le barycentre des charges positives, que l'on notera P , et le barycentre des charges négatives N . La somme des charges positives est notée q .

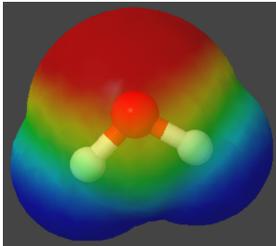
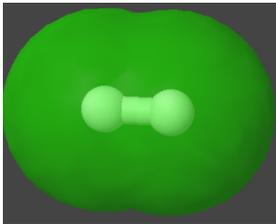
Approximation dipolaire

Dans le cas où :

- la charge totale de la distribution est nulle
- les barycentres P et N ne sont pas confondus
- on étudie le champ électrostatique à grande distance de la distribution

alors on modélise couramment le champ électrostatique comme étant celui d'un dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p} = q\overrightarrow{NP}$. C'est ce qu'on appelle l'approximation dipolaire de la distribution de charges.

Exemples concrets : Discutons de la modélisation simple du point de vue électrostatique que l'on peut faire de quelques entités chimiques courantes.

Entité chimique	Modélisation afin de déterminer le champ ES à grande distance
Ion chlorure Cl^-	★ Charge ponctuelle $-e$
Molécule d'eau H_2O 	★ Dipôle électrostatique de moment dipolaire $\vec{p} = 2\delta_+ \overrightarrow{NP}$. La molécule est dite polaire. Pour la molécule d'eau, $p = 1.85 \text{ D} = 1.85 \times 3.34 \times 10^{-30} \text{ C m} = 6.18 \times 10^{-30} \text{ C m}$
Molécule de dihydrogène H_2 	★ Cf. plus loin. La molécule est dite apolaire.

Remarque : Pour représenter les nuages électroniques de molécules simples : <https://libmol.org/scribmol/scrib.html>

IV.2 Quels sont le potentiel et le champ électrostatique créés par un dipôle électrostatique ?

a Potentiel électrostatique

D'après le principe de superposition, le potentiel au point M est :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{PM}\|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{NM}\|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{PM}\|} - \frac{1}{\|\vec{NM}\|} \right)$$

Or, on cherche à exprimer le potentiel en fonction uniquement des coordonnées sphériques de centre O .

(Donc, on veut faire apparaître \vec{OM} .) Donc (commencer plutôt par $\|\vec{NM}\|$ qui est plus simple) :

$$\|\vec{PM}\| = \|\vec{PO} + \vec{OM}\| = \sqrt{\|\vec{PO}\|^2 + \|\vec{OM}\|^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OM}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos(\pi - \theta)} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 - ar \cos(\theta)}$$

(On vient de redémontrer la formule d'Al-Kashi.)

De même,

$$\|\vec{NM}\| = \|\vec{NO} + \vec{OM}\| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos(\theta)}$$

Ainsi, on a :

$$\star \quad \frac{1}{\|\vec{PM}\|} - \frac{1}{\|\vec{NM}\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 - ar \cos(\theta)}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2 + ar \cos(\theta)}}$$

Or, $r \gg a$. On cherche donc à effectuer un DL à l'ordre le plus bas non nul :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|\vec{PM}\|} - \frac{1}{\|\vec{NM}\|} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a \cos(\theta)}{r}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a \cos(\theta)}{r}}} \right) \\ &= \frac{1}{r} \times \frac{a \cos(\theta)}{r} \\ &= \frac{a \cos(\theta)}{r^2} \end{aligned}$$

Finalement, le potentiel s'écrit, à l'ordre le plus bas en a/r :

$$V(M) = \frac{qa \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

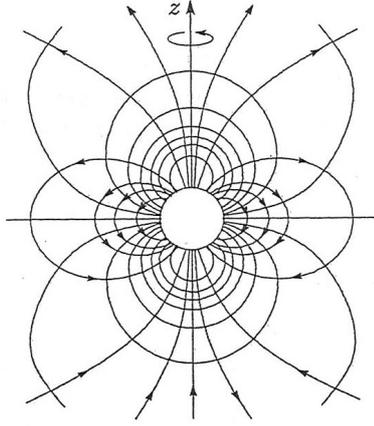
Analyse :

- **Etude des invariances** Il y a invariance de la distribution de charges par rotation d'angle φ . Donc, il est logique que le potentiel soit indépendant de φ .

• .

- Le potentiel du dipôle décroît avec la distance en $\frac{1}{r^2}$, c'est-à-dire qu'il décroît beaucoup plus vite avec la distance que celui créé par une charge ponctuelle, qui décroît en $\frac{1}{r}$. C'est pour cela que, à grande distance, le potentiel créé par un ion est largement prépondérant sur le potentiel créé par un dipôle.

- Les équipotentielles vérifient $V(M) = \text{cste} \iff \frac{\cos(\theta)}{r^2} = \text{cste} \iff r^2 = \text{cste} \times \cos(\theta)$.



Le tracé des équipotentiels permet immédiatement de déduire les lignes de champ \vec{E} , car celles-ci sont orthogonales aux équipotentiels.

On pourrait avoir l'impression, sur la carte de champ, que les lignes de champ \vec{E} sont fermées sur elles-mêmes, ce qui est incohérent avec $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0} \dots$

⚠ Mais, il faut se souvenir que le calcul précédent n'est valable que loin du dipôle : le calcul ne permet donc pas de conclure sur l'allure des lignes de champ au voisinage des deux charges ponctuelles.

b Champ électrostatique

Une fois que l'on connaît le potentiel électrostatique, on en déduit facilement le champ via : $\vec{E} = -\text{grad}(V)$. Le formulaire donne l'expression du gradient en coordonnées sphériques : $\text{grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$. On obtient :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3} \vec{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3} \vec{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}$$

Analyse :

- **Etude des symétries** Pour un point M quelconque, le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges. Donc, $\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta$: cohérent.
- **Etude des invariances** La distribution de charges est invariante par rotation d'angle φ . Donc : $\vec{E} = E_r(r, \theta) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$: cohérent.

Le champ \vec{E} du dipôle décroît avec la distance en $\frac{1}{r^3}$, c'est-à-dire qu'il décroît

★ beaucoup plus vite avec la distance que celui créé par une charge ponctuelle, qui décroît en $\frac{1}{r^2}$.

- On pourrait retrouver les équations des lignes de champ via l'équation $\vec{E} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$.

IV.3 Comment évolue un dipôle électrostatique plongé dans un champ électrique extérieur ?

a Actions mécaniques sur le dipôle : résultante et moment

On considère un dipôle électrostatique de moment dipolaire \vec{p} que l'on vient plonger dans un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} .

On admet les résultats suivants (qui ne sont pas à connaître par cœur) :

- le champ extérieur exerce un moment sur le dipôle $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}_{\text{ext}}$,
- le champ extérieur exerce une force sur le dipôle $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{\text{ext}}$

Remarque : Le moment mécanique exercé est indépendant du point O choisi pour calculer ce moment.

Analyse de l'effet du moment :

★ A l'équilibre, $\vec{\Gamma} = \vec{0}$, donc \vec{p} et \vec{E}_{ext} sont alignés. Le moment mécanique tend à aligner le moment dipolaire dans le sens du dipôle.

Exercice : Justifier qu'il existe une position d'équilibre stable pour un moment dipolaire soumis à un champ électrique externe uniforme.



On raisonne sur une perturbation de l'état d'équilibre. Considérons que le moment dipolaire peut tourner d'un angle α autour de l'axe (Oz) orthogonal au champ et au moment dipolaire : $\Gamma = -pE_{ext} \sin\alpha \vec{e}_z$. Ainsi, si $\alpha > 0$, le moment de force fait tourner le moment magnétique dans le sens horaire et le ramène vers $\alpha = 0$. Idem si $\alpha < 0$.

Analyse de l'effet de la force :

Précisons tout d'abord l'expression de l'opérateur $\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$ en coordonnées cartésiennes (à connaître) :

$$\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} = p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Remarque : Les expressions dans les autres systèmes de coordonnées doivent être fournies.

Cas particulier : champ \vec{E}_{ext} uniforme

Dans ce cas, $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{E}_{ext} = \vec{0}$: aucune action de translation ne s'applique sur le dipôle.

En pratique, étant donné que la distance entre les charges du dipôle électrostatique est faible devant la distance d'observation, tout champ électrique extérieur sera quasiment uniforme à l'échelle du dipôle. La plupart du temps, on négligera donc l'action de la force devant celle du moment.

Cas particulier : champ \vec{E}_{ext} non uniforme

Supposons donc que le moment dipolaire est déjà aligné avec le champ \vec{E}_{ext} . Prenons un exemple où le champ électrique extérieur est dirigé selon \vec{e}_x et augmente avec x : $E_{ext} = E(x)\vec{e}_x$. Dans ce cas, la force s'écrit :

$$\vec{F} = p_x \frac{\partial E}{\partial x} \vec{e}_x \quad \text{avec} \quad \frac{\partial E}{\partial x} > 0$$

Ainsi, la force tend à déplacer le dipôle vers les zones de champ fort.

b Énergie potentielle d'un dipôle rigide

Définition : Dipôle rigide

Dipôle électrostatique dont la norme du moment dipolaire $p = qa$ reste constante quand on le place dans un champ électrique extérieur.

On admet la forme de l'énergie potentielle qui s'applique à un dipôle rigide plongé dans un champ électrique extérieur (qui n'est pas à connaître) :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}$$

Exercice : Justifier (à nouveau) qu'il existe une position d'équilibre stable pour un moment dipolaire soumis à un champ électrique externe uniforme.



Calcul de l'énergie potentielle avec un angle α + graphe + bilan

IV.4 Application à la chimie

a Mise en solution d'un soluté ionique dans un solvant polaire

Prenons l'exemple de la mise en solution du chlorure de sodium $\text{NaCl}(s)$ dans un solvant polaire. Elle est constituée de 3 étapes :

- l'ionisation : formation d'une paire d'ions.
- la dissociation : séparation des ions.
- la solvatation (= hydratation si le solvant est l'eau) : création de sphères de solvatation.

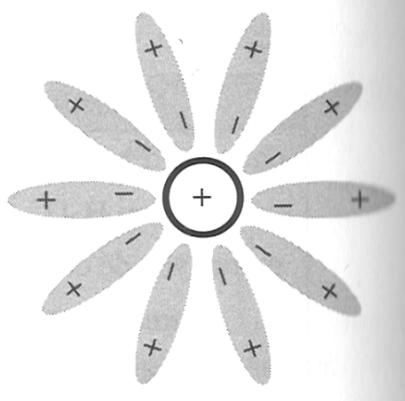
Décrivons qualitativement l'étape de solvatation des ions.

Cas d'un cation :

Représentation des lignes de champ électrostatique



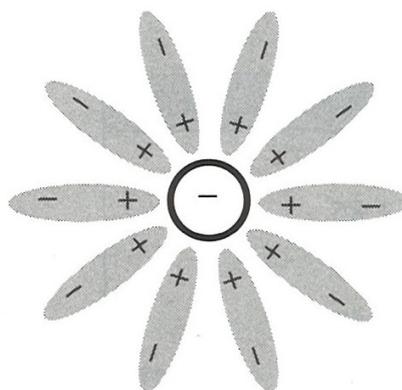
Interactions avec les molécules polaires du solvant



Le champ électrostatique créé par le cation exerce un moment mécanique sur les molécules polaires du solvant, qui tend à les orienter dans le sens du champ électrostatique. Puis, la force s'exerçant sur les molécules tend à les attirer vers la zone de champ fort, c'est-à-dire au voisinage de l'ion. L'interaction entre l'ion et le solvant résulte donc en la création de sphères de solvatation.

Cas d'un anion :

Le raisonnement est similaire et l'interaction ion - dipôles électrostatiques modélisant les molécules polaires du solvant aboutit à :



Remarque : Ne pas oublier qu'il peut exister un autre effet permettant la solvatation d'une entité chimique : la création de liaisons hydrogène entre le soluté et les molécules du solvant.

b Interactions de Van der Waals

Les interactions de Van der Waals sont des interactions entre dipôles électrostatiques à courte portée. On distingue 3 cas de figure.

Interactions entre deux dipôles permanents (= interaction de Keesom, 1920)

Le champ électrique créé par le dipôle électrostatique 1 exerce un moment et une force sur le dipôle électrostatique 2, qui tend à attirer le dipôle 2 à proximité du dipôle 1.

Interactions entre un dipôle permanent et un dipôle induit (= interaction de Debye, 1920)

Le dipôle permanent 1 crée un champ électrostatique au voisinage d'une molécule apolaire 2. Ce champ électrique a alors tendance à séparer les barycentres des charges positives et négatives dans la molécule apolaire 2 : il en résulte la création d'un dipôle induit.

Dipôle induit et polarisabilité

Sous l'effet d'un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} , une entité peut acquérir un moment dipolaire non nul : on parle de dipôle électrostatique induit. Le moment dipolaire résultant s'exprime en fonction de la polarisabilité α :

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{ext}}$$

Dimension de α :

$$\begin{aligned} [p] &= [\text{charge}]L \\ [\varepsilon_0 E] &= [\text{charge}]L^{-2} && \text{d'après la loi de Coulomb} \\ \Rightarrow [\alpha] &= L^3 \end{aligned}$$

Unité de α : m^3 . On retiendra que, pour un atome, on obtient un bon ordg de α avec le volume de l'atome considéré.

Odg : pour l'atome d'hydrogène : $\alpha = 8.4 \times 10^{-30} \text{ m}^3$

Ce dipôle induit de l'entité 2 subit donc également un moment et une force de la part du dipôle permanent 1.

Interactions entre deux dipôles induits (= interaction de London, 1930)

Considérons deux molécules apolaires 1 et 2. Certes, leur moment dipolaire est nul en moyenne, mais du fait des fluctuations du nuage électronique, à un instant t donné, une molécule acquiert un moment dipolaire instantané. A nouveau, ceci va polariser la seconde molécule apolaire, qui subit donc une force et un moment de la part du champ électrique créé par la première molécule.

V Déterminer le champ électrostatique créé par une distribution continue de charges

Nous allons désormais, pour certaines distributions continues de charges assez simples (autrement dit, avec une forte symétrie), calculer le champ électrique \vec{E} en tout point de l'espace.

V.1 Théorème de Gauss

A partir de l'équation locale de Maxwell-Gauss, on peut déduire une loi intégrale (ou loi macroscopique).

Considérons un volume (V) délimité par une surface (S) fermée. On peut intégrer l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\iiint_{(V)} \text{div}(\vec{E}) d\tau = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{(V)} \rho d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

★ avec Q_{int} la charge intérieure, comprise dans le volume (V). Avec le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

avec des vecteurs surface élémentaire $d\vec{S}$ sortants.

Théorème de Gauss

Pour une *surface fermée* (S) délimitant un volume (V), le flux sortant du champ électrique à travers cette surface fermée vaut :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad (V.1)$$

avec $Q_{int} = \iiint_{(V)} \rho d\tau$ la charge contenue à l'intérieur du volume (V).

Notons que cette formulation met en évidence que la position des charges à l'intérieur du volume n'a pas d'influence sur la valeur du flux sortant.

V.2 Utilisation du théorème de Gauss pour déterminer un champ électrique

a Méthode générale

Le théorème de Gauss va permettre des calculs de champs électrostatiques créés par des distributions de charges présentant des invariances et symétries. On procède toujours de la manière suivante :

Fiche-méthode : utilisation du théorème de Gauss

1. on choisit un système de coordonnées adapté et on détermine éventuellement les différentes zones d'étude (= zones où on place un point M pour lequel on souhaite connaître l'expression du champ électrique) : en particulier, le point peut être quelconque pour une distribution volumique, mais il ne peut pas se trouver sur la distribution surfacique ou linéique ;
2. on étudie les symétries pour déterminer la direction de \vec{E} ;
3. on étudie les invariances pour éliminer la dépendance en certaines variables pour \vec{E} ;
4. on choisit une surface de Gauss **fermée et orientée**, et pour laquelle le flux de \vec{E} se calcule facilement. On souhaite donc que $\vec{E} \cdot \vec{dS}$ soit nul, soit tel que le champ électrique soit dans le sens de \vec{dS} et de norme constante sur la surface : il sort de l'intégrale.
5. on applique alors le théorème de Gauss.



Tout comme on doit définir le système avant d'appliquer le PFD en mécanique, il est impératif de bien définir la surface de Gauss fermée avant application du théorème. À l'oral, il est en plus attendu que vous justifiez un tel choix de surface.

b Exemples avec une distribution volumique de charges

i) Boule chargée en volume

Commençons par étudier une sphère de rayon R uniformément chargée en volume. Elle est centrée en O , et on note ρ la densité volumique de charge, supposée uniforme, et Q la charge totale portée par la sphère. On a donc :

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

1. On se place en coordonnées sphériques ; on distinguera $M(r \leq R)$ et $M(r \geq R)$;
2. les symétries étudiées précédemment ont permis de conclure que $\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$;
3. les invariances par rotation impliquent $\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r$;
4. on choisit donc pour surface de Gauss fermée et orientée une sphère de centre O et de rayon r , de sorte que sur cette surface, le vecteur surface élémentaire soit colinéaire à \vec{E} et tel que \vec{E} est de norme constante quels que soient les angles θ et φ ;
5. on applique alors le théorème de Gauss en distinguant :
 - $r \leq R$:

★

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(V)} \rho d\tau \iff E_r(r) \oiint_{(S)} \vec{e}_r \cdot d\vec{S} = E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{d'où } E_r(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

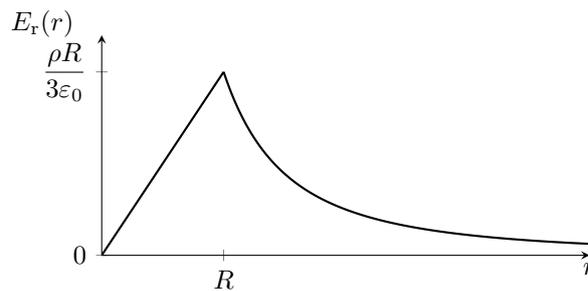
- $r \geq R$:

$$E_r(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\text{d'où } E_r(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ comme } Q = \rho \frac{4}{3} \pi R^3.$$

★ On constate ainsi d'une part qu'il y a continuité du champ en $r = R^-$ et $r = R^+$, et d'autre part que le champ pour $r \geq R$ est le même que celui créé par une charge ponctuelle Q placée en O !

On peut enfin tracer l'allure de la norme du champ électrique avec la distance :



ii) Cylindre uniformément chargé en volume

Exercice : Procéder de la même façon pour un cylindre infiniment long, d'axe (Oz) et de rayon R , uniformément chargé en volume (densité volumique ρ).

On reprend la même stratégie :

1. coordonnées cylindriques, et distinction $r \leq R$ et $r \geq R$;
- 2+3. symétries et invariances permettent de chercher le champ sous la forme $\vec{E} = E_r(r) \vec{e}_r$;
4. la surface de Gauss fermée et orientée est un cylindre d'axe (Oz) , rayon r et hauteur h , de sorte que le flux soit nul sur les deux disques, et simple à calculer sur la surface latérale (où E_r est constant) ;
5. on applique alors le théorème de Gauss :

★

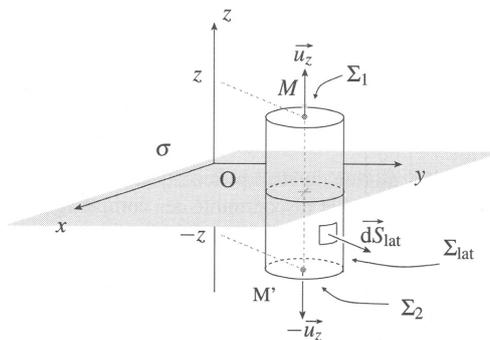
- pour $r \leq R$, $E_r 2\pi r h = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0}$ soit $E_r(r \leq R) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$;

- de même pour $r \geq R$, $E_r(r \geq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$

c Exemple avec une distribution surfacique de charges

Considérons le cas d'un pavé droit ayant l'une de ses dimensions très petite devant les deux autres. On peut alors le modéliser à l'aide d'une distribution surfacique de charges : le plan est donc chargé avec une densité surfacique de charge σ .

On se place en coordonnées cartésiennes. On recherche le champ \vec{E} pour un point M en dehors de la surface chargée située en $z = 0$. En étudiant les invariances et symétries, on cherche un champ sous la forme $\vec{E} = E_z(z)\vec{e}_z$. Cela nous pousse à considérer une surface de Gauss fermée et orientée cylindrique, de section S , qui englobe une portion du plan, et comporte deux surfaces Σ_1 et Σ_2 parallèles au plan chargé, avec les côtes $\pm z$.



Comme le plan (xOy) est un plan de symétrie de la distribution, les champs électriques en $M(z)$ et en $M'(-z)$ sont reliés par la relation $\vec{E}(z) = \text{Sym}(\vec{E}(-z))$, c'est-à-dire $E(z) = -E(-z)$.

Appliquons le théorème de Gauss à cette surface fermée et orientée, avec $z > 0$:

$$\iint_{\Sigma_{\text{lat}}} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}}_{=0} + \iint_{\Sigma_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \iff E(z)S - E(-z)S = 2E(z)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad (\text{V.2})$$

★ conduisant à

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{avec } z > 0 \quad \text{et} \quad E(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \quad \text{avec } z < 0$$

De manière synthétique :

$$\vec{E}(z) = \frac{\text{sgn}(z)\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{pour } z \neq 0$$

avec $\text{sgn}(z) = +1$ si $z > 0$ et -1 si $z < 0$.

On observe ainsi une discontinuité du champ électrique au passage de la surface chargée :

$$\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z \quad (\text{V.3})$$

Cette propriété assez générale constitue ce que l'on appelle une relation de passage.

Cette discontinuité est levée si on considère une distribution volumique de charge : le calcul montre que $E_z(z)$ dépend linéairement de z dans le pavé uniformément chargé en volumique $E(z) = \frac{\sigma z}{\varepsilon_0 e}$ avec e l'épaisseur du pavé.

Modélisation avec une distribution surfacique de charges

★

Une modélisation par une distribution surfacique de charges n'est valable que si l'on n'étudie le champ \vec{E} suffisamment loin de la surface chargée, car en réalité, les charges sont toujours réparties au sein d'un certain volume (même si ce volume est aplati).

V.3 Application : potentiel électrostatique créé par une boule uniformément chargée

Pour des distributions volumiques de charge, on peut montrer mathématiquement que *le potentiel électrique est une fonction continue et dérivable*.

Remarque : Dans le cas d'une distribution surfacique, le potentiel électrique est seulement continu, et pour une distribution linéique il diverge à l'approche de la distribution.

Exercice : On reprend le champ électrique déterminé pour une sphère chargée uniformément

en volume :

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}(r \geq R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Exprimer le potentiel électrique. On choisira par convention $V(+\infty) = 0$.

Commençons par $r \geq R$, où la convention de potentiel nul à l'infini permettra de déterminer la valeur de la constante d'intégration :

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \underbrace{\text{cste}}_{=0}$$

Pour $r \leq R$,

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr \Rightarrow V(r) = \text{cste} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon_0}$$

★ En se servant de la continuité du potentiel en $r = R$:

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} = -\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + \text{cste}$$

D'où :

$$\text{cste} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \quad (\text{V.4})$$

d'où finalement

$$V(r \leq R) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2} \right) \quad (\text{V.5})$$

Dans la suite, on aura besoin du résultat suivant, que l'on vient de démontrer :

Le potentiel électrostatique créé par une boule uniformément chargée de rayon R à sa surface est : $V(R) = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0}$ avec ρ la densité volumique de charges.

V.4 Application : énergie de constitution d'un noyau atomique

Pour simplifier, on modélise un noyau atomique de charge $Q > 0$ comme une boule de rayon R uniformément chargée, de densité volumique de charges $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$.

a Énergie de constitution : définition et principe du calcul

Définition : Énergie de constitution

Supposons initialement que toutes les charges d'un système soit à l'infini. L'énergie de constitution E_{const} est le travail qu'un opérateur extérieur doit fournir au système pour le construire de manière quasi-statique (= infiniment lentement).

Propriétés :

1. Stabilité du système
 - si $E_{\text{const}} > 0$, alors le système construit est instable.
 - si $E_{\text{const}} < 0$, alors le système construit est stable.
2. Comme la construction du système est quasi-statique, l'énergie cinétique est quasiment nulle à chaque instant : $dE_c = 0$.

Prenons l'exemple d'une charge ponctuelle q apportée depuis l'infini dans une zone de l'espace où règne le potentiel électrostatique $V(M)$.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la charge ponctuelle q entre les instants t et $t + dt$ donne :

$$dE_c = 0 = \delta W_{\text{op}} + \underbrace{\delta W_{\text{el}}}_{=-dE_p} \iff \delta W_{\text{op}} = dE_p$$

Donc, sur l'intégralité du parcours de la charge q :

★

$$W_{\text{op}} = \int_{\infty}^M dE_p = E_p(M) - \underbrace{E_p(\infty)}_{=0} = qV(M)$$

b Construction de la boule par un opérateur extérieur

Supposons que la boule de rayon $r \leq R$ a déjà été construite. On veut augmenter le rayonne la boule de dr .

Schéma avec une boule de rayon r et en pointillés la boule de rayon $r + dr$

On doit donc apporter depuis l'infini la charge $dq = \rho 4\pi r^2 dr$. Le travail à fournir à cette charge est alors :

$$\delta W_{\text{op}} = dq \times V(r)$$

avec $V(r)$ le potentiel créé par la boule déjà formée de rayon r , au niveau de sa surface.

Donc, d'après la partie précédente : $V(r) = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$. Ainsi :

★

$$\delta W_{\text{op}} = \rho 4\pi r^2 dr \times \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0} = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr$$

On en déduit que pour construire toute la boule de rayon R , le travail à fournir est :

$$W_{\text{op}} = E_{\text{const}} = \int_0^R \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 r^4 dr = \frac{4\pi}{3\epsilon_0} \rho^2 \frac{R^5}{5} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{5R} > 0$$

On en déduit que le noyau atomique est instable, si l'on ne prend en compte que les interactions électrostatiques. C'est logique : des charges positives se repoussent.

Ordre de grandeur : Dans le cas du noyau d'hélium, constitué de 2 protons et de 2 neutrons, de rayon $R \sim 2 \times 10^{-15}$ m et de charge $Q = +2e$, on calcule :

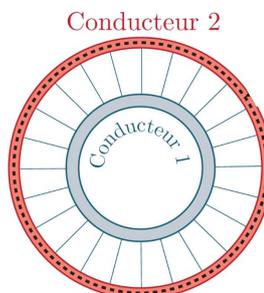
$$E_{\text{const}} \sim 2.8 \times 10^{-13} \text{ J} = 1.7 \text{ MeV}$$

Les expériences sur les noyaux atomiques montrent que, pour les noyaux de faible nombre de masse, l'ordre de grandeur de l'énergie de liaison par nucléon est 2 MeV. Donc, il faut fournir environ 8 MeV au noyau d'hélium pour dissocier ses nucléons : il existe bien une énergie d'interaction forte stabilisante de l'ordre de 10 MeV dans le cas du noyau d'hélium.

V.5 Application : condensateur plan en électrostatique

a Constitution d'un condensateur

Un condensateur est constitué de deux conducteurs séparés par un isolant électrique. Un condensateur idéal est tel que les deux conducteurs sont en *influence totale*, c'est-à-dire que toutes les lignes de champ issues de l'un vont jusqu'à l'autre. En pratique, c'est difficilement possible, du fait des *effets de bords*, sauf si un conducteur est entièrement compris dans une cavité d'un autre conducteur clos.



On relie les deux armatures du condensateur à un générateur électrique, de sorte à induire un déplacement de charges entre les deux conducteurs. Si le conducteur porte la charge Q_1 , alors le conducteur 2 porte la charge $Q_2 = -Q_1$ pour respecter la neutralité globale du système.

Rappel : définition de la capacité C

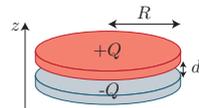
On définit la capacité du condensateur C , mesurée en farad (symbole F) comme le coefficient de proportionnalité entre la différence de potentiel et la charge portée. Avec V_1 et V_2 les potentiels sur chaque armature :

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \quad (\text{V.6})$$

b Condensateur plan idéal

Description

On modélise souvent un condensateur plan comme deux disques parallèles de rayon R distants de $d \ll R$, séparés par du vide et portant une charge $\pm Q$.



★ Du fait de l'écart très faible entre les deux plans, le champ électrostatique résultant est quasiment le même que celui créé par deux plans infinis (sauf près des bords). Dans le cadre du programme de PC, on néglige les effets de bord, et on modélise donc le condensateur plan par deux plans infinis : $R \rightarrow +\infty$.

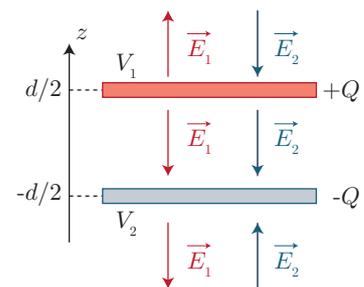
Calcul du champ électrique

Pour déterminer le champ électrique autour du plan, on utilise le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé, de densité surfacique σ : $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$.

Le champ créé dans tout l'espace est alors, d'après le théorème de superposition :

- ★
- pour $z > d/2$, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{+\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z + \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z\right) = \vec{0}$;
 - de même, pour $z < -d/2$, $\vec{E} = \vec{0}$;
 - enfin pour $-d/2 < z < d/2$, $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z + \left(-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z\right) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$

Ce champ électrique est limité, au maximum, par le champ électrique de claquage du matériau entre les armatures.



Remarque : Vous devez démontrer l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé si on vous demande d'établir le champ électrique dans tout l'espace pour le condensateur plan, cf. partie V-2-c.

Capacité

Connaissant le champ électrique dans le condensateur, on peut en déduire la relation entre la différence de potentiel et l'épaisseur d :

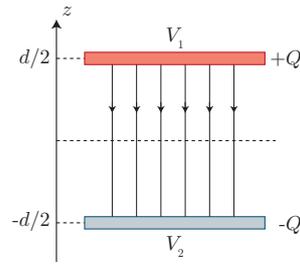
$$U = V_1 - V_2 = \int_{V_2}^{V_1} dV = \int_{-e/2}^{e/2} -\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= - \int_{-e/2}^{e/2} -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}$$

★

On exprime enfin la capacité :

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma e}{\varepsilon_0}} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \quad (\text{V.7})$$



Capacité d'un condensateur plan idéal

Pour un condensateur plan pour lequel on néglige les effets de bord :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

avec S la surface des armatures, d la distance entre les armatures et $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide.

c Énergie électrostatique

L'énergie emmagasinée dans un condensateur à l'instant t est $\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} C u_c(t)^2$. On le démontre, rappelons-le, à partir de la puissance reçue en convention récepteur : $\mathcal{P} = u_c i = C u_c \frac{du_c}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_c^2 \right)$ donc l'énergie reçue entre 0 et t est $\mathcal{E} = \int_0^t \mathcal{P} dt = \frac{1}{2} C u_c^2(t) - \frac{1}{2} C u_c^2(0)$.

On peut aller plus loin, en exprimant la densité volumique d'énergie électrostatique (car le champ \vec{E} est uniforme) :

★

$$u_e = \frac{\delta \mathcal{E}_e}{d\tau} = \frac{\frac{1}{2} C u^2}{Sd} = \frac{\frac{1}{2} \varepsilon_0 S (Ed)^2}{Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

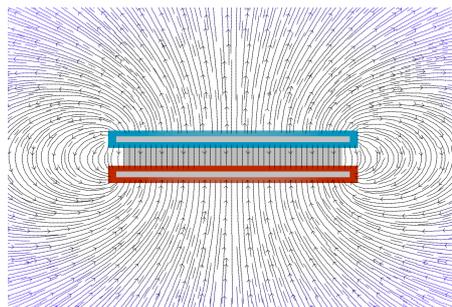
Densité volumique d'énergie électrique

On admet qu'on peut toujours écrire la densité volumique d'énergie associée à un champ électrique comme :

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

d Réalisation pratique et effets de bords

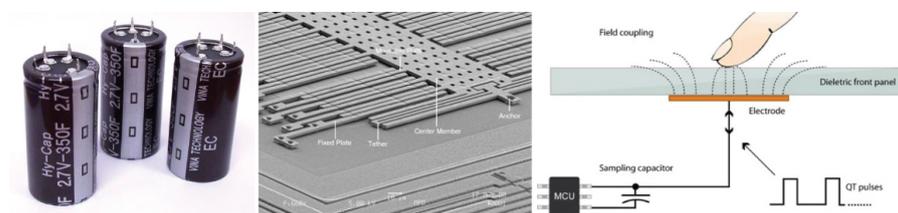
Concernant les effets de bord, ils sont d'autant plus visibles que l'épaisseur n'est pas trop petite devant les dimensions transverses des armatures. On constate alors que la capacité C est plus grande que celle déduite de la théorie. On observe en effet sur la figure ci-dessous que les lignes de champ se resserrent au voisinage des bords (ce que l'on appelle l'effet de pointe). Alors, pour une différence de potentiels imposée, l'effet de bord implique qu'une charge plus élevée (en valeur absolue) se trouve sur chaque armature, en comparaison du condensateur idéal.



e Applications

Citons quelques applications des condensateurs, en dehors de l'électronique pure :

- *stockage d'énergie* (on développe actuellement des supercondensateurs de capacité > 1000 F, alimentés sous une tension inférieure à 10 V) : ils stockent globalement moins d'énergie qu'une pile ou une batterie, mais l'accès à l'énergie (en charge ou en décharge) est plus rapide, avec une résistance interne très faible autorisant de forts courants. On les trouve dans les voitures électriques (système de récupération d'énergie au freinage) ou encore les éoliennes (contrôle d'orientation des pales des éoliennes), etc.
- *capteur* de position (mesure de niveau d'un liquide), d'accélération (les MEMS reposent sur l'influence de la capacité de condensateurs déformables), de toucher (technologie de certains écrans tactiles), etc.



- ★ Pour les curieux voulant connaître le fonctionnement de la machine de Wimshurt (totalement hors programme, on est d'accord) : <https://www.youtube.com/watch?v=nA4aCd5qFWs>

VI Analogie entre l'électrostatique et la gravitation

Terminons ce chapitre en notant la très forte analogie entre le champ électrostatique et le champ gravitationnel, à ceci près que l'interaction gravitationnelle est toujours attractive. Le tableau ci-dessous résume cette analogie :

Champ électrique \vec{E}	Champ gravitationnel \vec{G}
Force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$	★ Force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{G}$
Cas de deux charges q_1 et q_2 $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0(M_1 M_2)^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$	★ Cas de deux masses m_1 et m_2 $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{(M_1 M_2)^2} \vec{u}_{1 \rightarrow 2}$
q_1, q_2	★ m_1, m_2
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	★ $-G$, avec $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$
Pour une charge ponctuelle : $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$	★ Pour une masse ponctuelle : $\vec{G}(M) = -Gm \frac{\vec{e}_r}{r^2}$
Equations locales : $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ et $\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	★ $\text{rot}(\vec{G}) = \vec{0}$ et $\text{div}(\vec{G}) = -4\pi G\rho$ ★ avec ρ la masse volumique
Théorème de Gauss $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$	Théorème de Gauss gravitationnel ★ $\oiint_{(S)} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM_{int}$

Les raisonnements conduits pour l'application du théorème de Gauss sont similaires lorsqu'on étudie une distribution de masse, qu'elle soit ponctuelle ou volumique : repère et coordonnées, éléments de symétrie et d'invariance, choix de la surface de Gauss fermée et orientée, puis application du théorème.

Exercice : Sur l'exemple d'une boule de masse totale M et de rayon R , retrouver le champ gravitationnel partout dans l'espace.

Même raisonnement que pour la sphère uniformément chargée en volume. Avec $\rho =$

★ $M / \left(\frac{4}{3}\pi R^3 \right)$, il vient :

$$\vec{g}(r \leq R) = -\frac{4\pi G\rho r}{3} \quad \text{et} \quad \vec{g}(r \geq R) = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$$

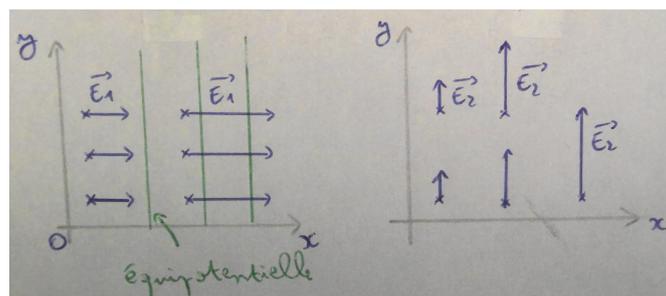
Savoir-faire exigibles du BO	Exercice
Exprimer le champ électrostatique et le potentiels créés par une distribution discrète de charges.	7 et 9
Citer quelques odg de champs électrostatiques (en particulier, le champ disruptif de l'air).	Cours
Exploiter des propriétés de symétrie des sources (symétrie plane, conjugaison de charges) et d'invariances (par translation, par rotation) pour prévoir des propriétés du champ créé.	4, 5, 6, 8 et 10
Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday en régime variable et en régime stationnaire.	1, 2, 3, 4 et 7
Relier l'existence du potentiel scalaire électrique au caractère irrotationnel de \vec{E} .	1
Exprimer une différence de potentiels comme une circulation du champ électrique.	3 et 6
Justifier qu'une carte de champ puisse être ou non celle d'un champ électrostatique. Repérer, sur une carte de champ électrostatique, d'éventuelles sources du champ, et leur signe.	1 et 2
Associer l'évasement des tubes de champ à l'évolution de la norme de E en dehors des sources.	2
Représenter les lignes de champ connaissant les surfaces équipotentiels et inversement. Justifier l'orientation des lignes de champ dans le sens des potentiels décroissants. Évaluer la norme du champ électrostatique à partir d'un réseau de surfaces équipotentiels.	1 et 2
Dipôle électrostatique : Citer les conditions de l'approximation dipolaire. Etablir l'expression du potentiel électrostatique. Comparer la décroissance du champ et du potentiel dans le cas d'une charge ponctuelle et dans le cas d'un dipôle. Tracer l'allure des lignes de champ électrostatique engendrées par un dipôle.	7 et 9
Utiliser les expressions fournies de la résultante, du moment des actions subies et de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure. Prévoir qualitativement l'évolution d'un dipôle rigide dans un champ électrostatique d'origine extérieure.	9
Expliquer qualitativement la solvatation des ions dans un solvant polaire. Associer la polarisabilité et le volume de l'atome en odg.	8
Choisir une surface adaptée et utiliser le théorème de Gauss.	4, 5, 6, 8 et 10
Établir la relation entre l'énergie potentielle d'une charge ponctuelle et le potentiel.	5
Exprimer l'énergie de constitution d'un noyau en construisant le noyau par adjonction progressive de charges apportées de l'infini.	5
Établir le champ électrique créé par un plan infini uniformément chargé en surface.	4
Etablir l'expression du champ créé par un condensateur plan, ainsi que sa capacité.	6
Déterminer l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique dans le cas du condensateur plan, à partir de l'énergie du condensateur.	Cours
Établir les analogies entre les champs électrique et gravitationnel.	10

Ex. 1 Utilisation des équations locales

On propose deux expressions pour des champs : $\vec{E}_1 = Kx\vec{e}_x$ et $\vec{E}_2 = Kx\vec{e}_y$, avec K une constante.

1. Représenter chacun de ces champ \vec{E} en différents points du plan (Oxy).
2. Calculer la divergence et le rotationnel de ces deux champs.
3. En déduire qu'un seul de ces champs peut être un champ électrostatique et déterminer la densité volumique de charge correspondante. Ajouter, sur votre représentation graphique des champs, les courbes équipotentiels pour le seul champ électrostatique.

Correction de l'exercice 1

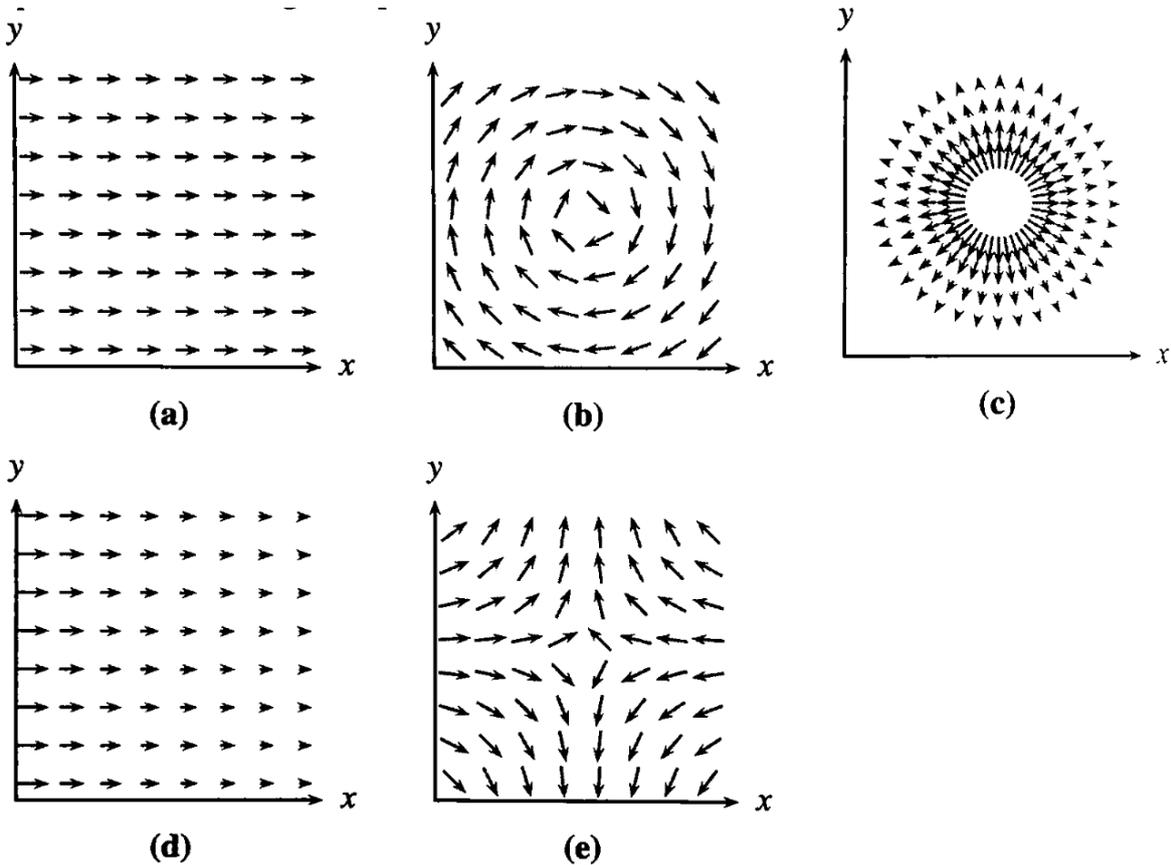


- 1.
2. $\text{div}(\vec{E}_1) = K$ et $\text{div}(\vec{E}_2) = 0$ d'une part ; $\text{rot}(\vec{E}_1) = 0$ mais $\text{rot}(\vec{E}_2) = -K\vec{e}_z \neq \vec{0}$.

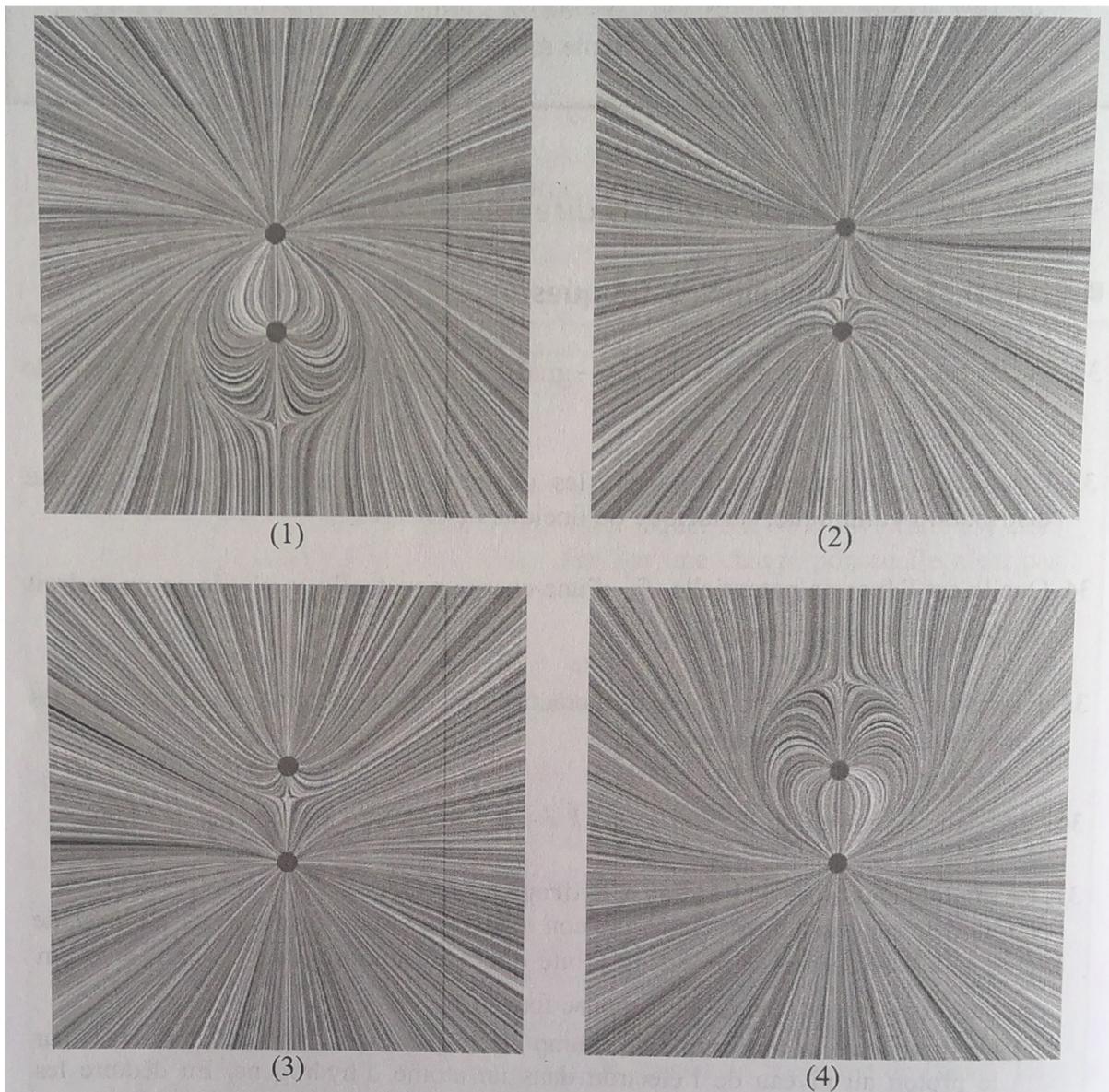
3. On conclut donc que le champ \vec{E}_2 ne vérifie pas les équations locales de l'électrostatique. Pour le champ \vec{E}_1 , on doit avoir $\text{div}(\vec{E}_1) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = K$ donc $\rho = K\varepsilon_0 = \text{cste}$. Les courbes équipotentielles sont orthogonales aux lignes de champ de \vec{E}_1 , et sont donc des droites à $x = \text{cste}$.

Ex. 2 Topographie du champ électrostatique

1. Parmi les cinq cartes de champs ci-dessous, déterminer les trois qui correspondent à un champ électrostatique. Pour ces trois cartes de champs électrostatiques, indiquer si des charges sont présentes dans la région de l'espace cartographiée, et si oui, préciser le signe de ces charges.



2. On s'intéresse à la carte (page suivante) du champ électrostatique généré par deux objets de charges négatives respectives $-q$ et $-4q$. Sachant que sur la représentation, l'objet de charge $-4q$ est au-dessus de celui de charge $-q$, déterminer en justifiant la seule carte de champ valide. Sur cette carte de champ valide, orienter les lignes de champ.



Correction de l'exercice 2

1. **Champ électrostatique** Pour qu'une carte de champ puisse être celle d'un champ électrostatique, il faut que $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ (l'équation de Maxwell-Gauss n'impose aucune contrainte sur la valeur de la divergence). On s'appuie sur l'interprétation physique (et intuitive) du rotationnel : si on imagine qu'il s'agit d'un champ de vitesse et que l'on place une particule solide dans l'écoulement, la particule a une vitesse de rotation nulle si le rotationnel est nul. Donc, ici, seules les cartes de champs (a), (c) et (d) sont des cartes de champ électrostatique.

Remarque : On peut également conclure du fait que $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$ qu'il ne doit exister aucune ligne de champ fermée. Il est alors clair que (b) n'est pas une carte de champ électrostatique. Il est plus difficile de voir que c'est également le cas de (e) : les lignes de champ se ferment "à l'infini".

Présence de charges Cette fois, c'est l'équation locale de Maxwell-Gauss qui permet de conclure sur la présence de charge. On s'intéresse donc à la divergence du champ.

- **Champ (a)** On a un champ uniforme, donc $\text{div}(\vec{E}) = 0$: aucune charge n'est présente.
 - **Champ (c)** Le champ diverge à partir du centre de la figure : $\text{div}(\vec{E}) > 0$. Donc, une charge positive est présente au centre.
 - **Champ (d)** En un point M de l'espace, le flux sortant à travers une petite sphère autour de M est négatif (le champ a tendance à rentrer dans la sphère) : $\text{div}(\vec{E}) < 0$. Donc, des charges négatives sont présentes dans la région représentée (en fait, il s'agirait d'une distribution continue ici).
2. Les deux charges sont négatives, donc nécessairement le champ électrostatique doit converger au niveau des deux charges ponctuelles. Les cartes (1) et (4) ne conviennent alors pas, car les lignes de champ vont d'une charge à l'autre.

La charge négative étant plus importante pour celle située au-dessus, le champ doit converger de manière plus

intense vers la charge du-dessus ($\text{div}(\vec{E})$ augmente en valeur absolue). Donc, le champ électrostatique doit être plus important en norme au voisinage de la charge du-dessus. Cela se traduit par un resserrement des lignes de champ. Ainsi, la carte de champ (2) est celle valide.

On oriente alors les lignes de champ en sachant que le champ converge vers les charges ponctuelles.

Ex. 3 Calcul d'un potentiel et d'une densité volumique de charge

Dans l'espace muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un champ électrique a pour expression :

- $\vec{E} = E_0 \frac{x}{a} \vec{e}_x$ pour $-a \leq x \leq a$;
- hors de cet intervalle, le champ est uniforme : $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ pour $x > a$ et $\vec{E} = -E_0 \vec{e}_x$ pour $x < -a$.

1. Déterminer l'expression du potentiel $V(x)$ en tout point. On pose $V(0) = 0$.
2. On considère les points $A(-a, 0, 0)$ et $B(a, 0, 0)$.
 - (a) Calculer $V(A) - V(B)$.
 - (b) En déduire $\int_{[AB]} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, en utilisant la différence de potentiels.
 - (c) Vérifier alors votre relation précédente en réalisant le calcul explicite de l'intégrale du champ électrique.
3. Calculer la densité volumique de charge $\rho(x)$ correspondant à ce champ électrique.

Correction de l'exercice 3

1. **Méthode :** Il faut commencer par calculer $V(-a \leq x \leq a)$, car c'est la seule zone de l'espace où on connaîtra la valeur de la constante d'intégration (donnée dans l'énoncé).

Avec la relation $dV(x) = -\vec{E} \cdot d\vec{r} = -E(x)dx$, l'intégration conduit à :

$$V(-a \leq x \leq a) = -E_0 \frac{x^2}{2a} \quad (\text{Ex.1})$$

où la constante d'intégration a été déterminée avec $V(0) = 0$. Puis en intégrant sur les deux autres portions, en utilisant la continuité du potentiel en $-a$ et en a :

$$V(x \leq -a) = E_0 \left(x + \frac{a}{2}\right) \quad \text{et} \quad V(x \geq a) = -E_0 \left(x - \frac{a}{2}\right) \quad (\text{Ex.2})$$

2. (a) On a simplement :

$$V(A) - V(B) = 0$$

- (b) Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$, on peut relier une différence de potentiels à la circulation du champ électrique.

$$V(A) - V(B) = \int_B^A dV = \int_B^A \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

Donc, avec la question précédente : $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$.

- (c) Avec le calcul explicite de l'intégrale :

$$\int_A^B E_0 \frac{x}{a} dx = E_0 \left[E_0 \frac{x^2}{2a} \right]_{-a}^a = 0 \quad (\text{Ex.3})$$

ce qui est cohérent avec la question précédente !

3. Pour déterminer la densité volumique de charge, utilisons l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\rho = \varepsilon_0 \text{div}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \frac{dE_x}{dx} = 0 \quad \text{si} \quad x \notin [-a; a] \quad (\text{Ex.4})$$

$$= \varepsilon_0 \frac{E_0}{a} \quad \text{si} \quad -a \leq x \leq a \quad (\text{Ex.5})$$

On constate que la densité volumique de charge est discontinue en $\pm a$. Cette distribution décrit un pavé droit, de hauteur x comprise entre $-a$ et a , uniformément chargé en volume. Cette modélisation permet donc bien de lever la discontinuité du champ électrique au passage d'un plan uniformément chargé en surface (cf cours).

Ex. 4 Membrane cellulaire

Une membrane cellulaire (d'un être vivant) est assimilée au plan infini (Oyz); l'axe (Ox) est orienté vers l'extérieur de la cellule.

On schématise le potentiel par la fonction suivante : $V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ -V_0 \exp(-\frac{x}{a}) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$, où $V_0 > 0$ est une constante et a une distance.

1. Calculer le champ électrique \vec{E} en tout point.
2. Déterminer la densité volumique de charges ρ en tout point de 2 manières :
 - (a) grâce à l'équation de Maxwell-Gauss;
 - (b) en appliquant le théorème de Gauss.
3. (a) Déterminer la densité surfacique de charge σ présente sur la surface d'équation $x = 0$.
 (b) Déterminer la charge totale contenue dans un cylindre d'axe Ox et de base S , s'étendant indéfiniment le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$).

Correction de l'exercice 4

1. Utilisons la forme $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$:

$$\vec{E}(x \leq 0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(x > 0) = -\frac{V_0}{a} e^{-x/a} \vec{e}_x \quad (\text{Ex.6})$$

2. (a) Avec Maxwell-Gauss, $\rho = \varepsilon_0 \text{div}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \frac{dE_x}{dx}$ conduisant à

$$\rho(x \leq 0) = 0 \quad \text{et} \quad \rho(x > 0) = \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} e^{-x/a} \quad (\text{Ex.7})$$

- ;
- (b) En utilisant le théorème de Gauss sur une surface fermée cylindrique de section S , dont deux faces sont perpendiculaires à \vec{e}_x , une face située en x et l'autre en $x + dx$, orientée vers l'extérieur :

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \iff E(x + dx)S - E(x)S = \frac{\rho(x)Sdx}{\varepsilon_0} \quad (\text{Ex.8})$$

soit en développant à l'ordre 1 :

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{dE}{dx}(x) = \varepsilon_0 \frac{V_0}{a^2} e^{-x/a} \quad (\text{Ex.9})$$

Et de même pour $x < 0$ où la constance du champ conduit bien à $\rho(x \leq 0) = 0$.

3. Parmi les deux méthodes précédentes, la seule qui puisse donner une information sur la densité surfacique de charges est le théorème de Gauss (la méthode avec l'équation de Maxwell-Gauss n'est sensible qu'à une densité volumique de charges).

On peut appliquer le théorème de Gauss sur un cylindre de section droite S parallèle à (Ox), de hauteur dx à cheval sur $x = 0$. La charge contenue dans ce volume est approximativement σS :

$$\left(-\frac{V_0}{a} - 0\right)S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \iff \sigma = -\frac{\varepsilon_0 V_0}{a} \quad (\text{Ex.10})$$

- 4.

$$Q = \sigma S + \int_0^{+\infty} \rho(x)Sdx = S \left(\sigma + \frac{\varepsilon_0 V_0}{a^2} \left[\frac{e^{-x/a}}{-1/a} \right]_0^{+\infty} \right) = -\frac{\varepsilon_0 V_0 S}{a} + \frac{-\varepsilon_0 V_0 S}{a} = 0 \quad (\text{Ex.11})$$

Ex. 5 Energie de constitution d'un noyau sphérique à partir de la densité volumique d'énergie

On modélise un noyau atomique de rayon R et de charge Q par une boule uniformément chargée, avec la densité volumique de charges ρ .

1. Donner un ordre de grandeur de R et de Q pour le noyau de l'atome de carbone.
2. Déterminer l'expression du champ électrostatique créé dans tout l'espace par cette boule chargée en fonction de ρ et de R .

On cherche alors à déterminer l'énergie de constitution du noyau de carbone.

- Rappeler la définition de l'énergie de constitution. Montrer alors que, dans le cas d'un déplacement quasi-statique d'une charge q , le travail de l'opérateur pour amener cette charge depuis l'infini jusqu'à une zone de l'espace où règne le potentiel $V(M)$ s'identifie à l'énergie potentielle $E_p(M) = qV(M)$.
- On propose alors un calcul de l'énergie de constitution par une méthode différente de celle du cours. En intégrant la densité volumique d'énergie électrostatique dans tout l'espace, déterminer l'énergie électrostatique créée par le noyau atomique en fonction de ρ et de R .
- Commenter par rapport à l'expression trouvée dans le cours, en créant le noyau par adjonction progressive de charges venant de l'infini. Application numérique dans le cas du noyau de carbone. On donne : $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$.

Correction de l'exercice 5

- Pour l'atome de carbone, le numéro atomique est $Z = 6$, donc $Q = +6e = 9.6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Pour les noyaux atomiques, l'odg de R est le femtomètre : $R \sim 10^{-15} \text{ m}$.
- Cours. Bien représenter les surfaces de Gauss orientées et fermées choisies. On trouve, en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

- Définition : L'énergie de constitution est l'énergie qu'un opérateur doit fournir aux charges pour construire le système à partir des charges situées à l'infini.

Dans le cas d'un déplacement élémentaire quasi-statique, $dE_c = 0$. Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à une charge q dans le référentiel du laboratoire galiléen donne : $0 = \delta W_{op} + \delta W_e$ avec δW_{op} le travail élémentaire que l'opérateur fournit à la charge et δW_e est le travail élémentaire fourni par le champ électrique à la charge. On a :

$$\delta W_e = q \vec{E} \cdot d\vec{r} = -q \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{r} = -q dV = -dE_p$$

En intégrant le théorème de l'énergie cinétique :

$$\underbrace{E_p(M)}_{=qV(M)} - \underbrace{E_p(\infty)}_{=0} = W_{op}$$

- L'énergie électrostatique créée par la boule chargée uniformément est :

$$\begin{aligned} E_e &= \iiint_{\text{tout l'espace}} u_e d\tau = \iiint_{\text{tout l'espace}} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi}_{=4\pi} \right) \times \left(\int_{r=0}^R \left(\frac{\rho r}{3\epsilon_0} \right)^2 r^2 dr + \int_{r=R}^{+\infty} \left(\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr \right) \\ &= \frac{2\pi \rho^2}{9\epsilon_0} \times \left(\frac{R^5}{5} + \frac{R^6}{R} \right) \\ &= \frac{4\pi \rho^2 R^5}{15\epsilon_0} \end{aligned}$$

- On retrouve exactement la même expression que celle du cours ! C'est logique : comme il n'y a aucun phénomène dissipatif, l'énergie électrostatique créée par le noyau dans tout l'espace correspond à l'énergie dépensée par l'utilisateur pour constituer le noyau. L'énergie de constitution du noyau a été transférée dans le champ électrostatique.

En utilisant $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = 2 \times 10^{26} \text{ C m}^{-3}$, on trouve : $E_e = 5 \times 10^{-12} \text{ J} = 3 \times 10^1 \text{ MeV}$. Cela se trouve être le bon odg de l'énergie de dissociation d'un noyau atomique, mais on n'a considéré ici que des phénomènes électrostatiques, sans interaction nucléaire forte...

Ex. 6 Capacité d'un condensateur sphérique

La couche supérieure de l'atmosphère, appelée l'ionosphère, subit un bombardement incessant de particules cosmiques qui ionisent les molécules présentes en haute altitude. Cela a pour effet de rendre cette couche de l'atmosphère particulièrement bien conductrice. De même, la Terre elle-même peut conduire le courant électrique.

Nous allons donc modéliser la Terre et son atmosphère comme deux conducteurs sphériques imbriqués l'un dans l'autre, et ayant deux rayons $R_1 = 6370 \text{ km}$ et $R_2 = R_1 + h$ avec $h = 70 \text{ km}$. L'air séparant ces deux conducteurs sera assimilé à du vide.

1. Montrer que le champ électrique régnant dans l'atmosphère s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \vec{e}_r$$

avec Q_1 la charge portée par le conducteur de rayon R_1 .

2. En déduire la capacité C du condensateur formé par la Terre et son atmosphère.
3. Calculer ensuite l'énergie électrostatique E_e présente dans l'atmosphère en intégrant la densité volumique d'énergie et vérifier la relation : $E_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$ avec U la différence de potentiels entre les deux conducteurs.

Correction de l'exercice 6

1. On procède exactement comme dans le cours. On se place en coordonnées sphériques.

(a) **Détermination du champ électrique généré par un conducteur sphérique de rayon R seul et uniformément chargé en surface avec une charge totale Q**

i. Schéma

ii. Pour un point M quelconque, les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Donc : $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$.

iii. Invariance de la distribution de charge par rotations d'angles θ et φ : $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$

iv. On applique le théorème de Gauss à la surface fermée constituée d'une sphère de rayon r en distinguant deux cas :

• **Cas $r < R$:**

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = 0$$

car on intègre à r constant. Donc :

$$\vec{E}(r < R) = \vec{0}$$

• **Cas $r > R$:**

$$\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

car on intègre à r constant. Donc :

$$\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \vec{e}_r$$

(b) On utilise le théorème de superposition en considérant que la sphère de rayon R_1 porte la charge $-Q$ et celle de rayon R_2 porte la charge $+Q$. Donc, entre les deux conducteurs, il règne le champ :

$$\vec{E} = \vec{E}_1(r > R_1) + \vec{E}_2(r < R_2) = -\frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \vec{e}_r$$

On retrouve la formule proposée dans l'énoncé avec $Q_1 = -Q$ ici.

2. On calcule la différence de potentiels $U = V_2 - V_1$ pour pouvoir utiliser la formule donnant C : $Q = Q_2 = C(V_2 - V_1)$.

$$U = V_2 - V_1 = \int_1^2 dV \tag{Ex.12}$$

$$= \int_1^2 \vec{\text{grad}}(V) \cdot d\vec{r} \tag{Ex.13}$$

$$= - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad \text{avec} \quad \vec{r} = dr \vec{e}_r \tag{Ex.14}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} dr \tag{Ex.15}$$

$$= \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \tag{Ex.16}$$

Ainsi, on en déduit que :

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi \varepsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi \varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{4\pi \varepsilon_0 R_1 R_2}{h} > 0$$

On retrouve à nouveau que si h diminue, à R_1 et R_2 fixés, C augmente : cohérent. A.N. : $C = 6.5 \times 10^{-2}$ F (ce qui n'est pas si faible que ça : beaucoup d'énergie peut être stocké dans l'énergie EM dans l'atmosphère terrestre !).

3. Pour calculer l'énergie électrostatique, on doit intégrer dans tout le volume entre les deux conducteurs :

$$E_e = \iiint_{(V)} \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\tau \quad (\text{Ex.17})$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \iiint_{(V)} \left(\frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \quad (\text{Ex.18})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0} \times 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr \quad (\text{Ex.19})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_0} \times \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{Ex.20})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2 h}{4\pi \varepsilon_0 R_1 R_2} \quad (\text{Ex.21})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2 \quad (\text{Ex.22})$$

La dernière égalité provient de l'expression $Q = CU$.

Ex. 7 Equation de Poisson : détermination et résolution

1. En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, démontrer l'équation de Poisson, qui porte sur le potentiel électrostatique :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

avec ρ la densité volumique de charges.

Dans la suite, on cherche à résoudre cette équation dans un espace vide de charge et en coordonnées sphériques. On doit donc résoudre l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

- On cherche la solution sous la forme suivante : $V(r, \theta) = A_n r^n \cos(\theta)$ avec A_n une constante et n un entier relatif. Déterminer les valeurs de n permettant d'avoir un potentiel non identiquement nul.
- Pour les valeurs de n trouvées précédemment, proposer une situation physique pouvant être à l'origine d'un tel potentiel.

Formulaire : Laplacien en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Correction de l'exercice 7

1. En injectant la définition du potentiel électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ dans l'équation de Maxwell-Gauss, on a :

$$\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}(V)) = -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

2. Avec le formulaire, on peut ré-écrire l'équation de Laplace pour $V(r, \theta)$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

On injecte alors la forme proposée pour $V(r, \theta)$ et on trouve, tous calculs faits :

$$A_n \cos(\theta) (n^2 + n - 2) r^{n-2} = 0$$

Le potentiel ne sera pas identiquement nul si et seulement si

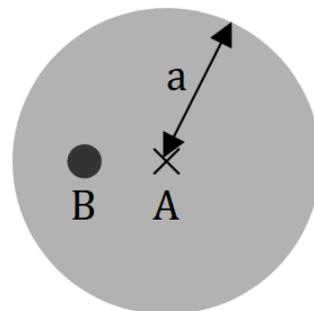
$$n^2 + n - 2 = 0 \iff n = -2 \quad \text{ou} \quad n = 1$$

3. • Cas $n = -2$: On a alors $V = \frac{A \cos\theta}{r^2}$. On reconnaît un potentiel qui décroît en $\frac{1}{r^2}$ qui est exactement le potentiel créé par un dipôle électrostatique centré sur l'origine, et dont le moment dipolaire est orienté selon \vec{e}_z .
- Cas $n = 1$: On a alors $V = Br \cos\theta = Bz$ (en effet, en coordonnées sphériques, $r \cos\theta = z$: faire un schéma pour s'en convaincre !). On reconnaît le potentiel entre les deux armatures du condensateur plan infini, dans le cas où les armatures sont orthogonales à \vec{e}_z .

Remarque : On peut noter que la présence du $\cos\theta$ dans l'expression du potentiel impose le fait que le plan (Oxy) soit un plan d'antisymétrie pour \vec{E} (et donc pour la distribution de charges qui en est à l'origine). L'absence de φ dans l'expression du potentiel impose une invariance par rotation d'angle φ . C'est bien le cas dans les deux situations physiques proposées.

Ex. 8 Modèle de l'électron élastiquement lié (cas statique)

Pour décrire un atome, on propose le modèle suivant : le noyau est supposé ponctuel et porte la charge électrique $+q$. Le nuage électronique est assimilé à une boule indéformable de rayon a , de densité volumique de charge ρ uniforme. La charge totale du nuage électronique est égale à $-q$. Le nuage électronique et le noyau peuvent se déplacer librement l'un par rapport à l'autre. On supposera néanmoins que le noyau reste toujours à l'intérieur du nuage électronique. On néglige les forces autres que coulombiennes.



On appelle A la position du centre du nuage électronique et B celle du noyau. On introduit le vecteur position $\vec{r} = \vec{AB}$.

- Calculer la densité volumique de charge du nuage électronique ρ en fonction de q et de a .
- En appliquant le théorème de Gauss à une surface judicieusement choisie, calculer le champ \vec{E}_{int} créé par le nuage électronique en tout point de l'espace.
- En déduire alors que la force que le nuage électronique exerce sur le noyau est

$$\vec{F} = -K\vec{r}$$

avec K une constante positive à exprimer en fonction de q , a et ε_0 . On se limitera pour ce calcul au cas $r = \|\vec{r}\| \leq a$, comme prévu.

Cette force entre le nuage et le noyau est attractive et proportionnelle au vecteur position, comme la force de rappel qu'un ressort exerce sur une masse située à son extrémité. On appelle donc ce modèle le modèle de l'électron élastiquement lié.

- On plonge désormais l'atome dans un champ électrique extérieur \vec{E}_{ext} . Représenter \vec{E}_{ext} sur le schéma de l'énoncé. Déterminer l'expression de \vec{r} à l'équilibre. Préciser également l'expression de la valeur maximale de \vec{E}_{ext} pour que le modèle de l'électron élastiquement lié reste valable. Que se passe-t-il si on dépasse cette valeur ?
- Définir le moment dipolaire de l'atome \vec{p} . L'exprimer en fonction de \vec{E}_{ext} . Que vaut \vec{p} lorsque $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$? En déduire s'il s'agit d'un moment dipolaire permanent ou induit.
- Déterminer l'expression de la polarisabilité α de l'atome. Application numérique pour l'atome d'hélium : $q = 3.2 \times 10^{-19} \text{ C}$ et $a = 7 \times 10^{-10} \text{ m}$.

Correction de l'exercice 8

- La densité volumique de charge étant uniforme, on a :

$$\rho \times \frac{4}{3}\pi a^3 = -q \iff \rho = -\frac{3q}{4\pi a^3} < 0$$

- On se place en coordonnées sphériques de centre A .

- Symétries** Pour un point M quelconque, les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges du nuage électronique. Donc, $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$
- Invariances** La distribution de charges est invariante par rotation d'angles θ et φ : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.
- On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r centrée sur A , orientée vers l'extérieur :
 - Cas $r > a$:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{-q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = -\frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \vec{e}_r$$

- Cas $r < a$:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r = -\frac{qr}{4\pi a^3 \epsilon_0} \vec{e}_r$$

3. Ainsi, le nuage électronique exerce sur le noyau la force

$$\vec{F}_{\text{nuage} \rightarrow \text{noyau}} = q\vec{E}(r \leq a) = -\frac{q^2 r}{4\pi a^3 \epsilon_0} \vec{e}_r = -\frac{q^2}{4\pi a^3 \epsilon_0} \vec{r}$$

4. Ne pas se tromper sur le sens de \vec{E}_{ext} : étant donné que le noyau est à gauche du nuage, c'est qu'il a subi une force l'attirant vers la gauche du nuage : \vec{E}_{ext} va de la droite vers la gauche.

Système : {noyau}. Référentiel du nuage électronique supposé galiléen. PFD, à l'équilibre :

$$\vec{F} + q\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0} \iff \vec{r} = \frac{4\pi a^3 \epsilon_0}{q} \vec{E}_{\text{ext}}$$

Le modèle restera valable tant que

$$r \leq a \iff \left\| \vec{E}_{\text{ext}} \right\| \leq \frac{q}{4\pi a^2 \epsilon_0}$$

Si on dépasse cette valeur, le champ interne créé par le nuage ne permet plus de compenser le champ externe appliqué : le noyau s'écarte indéfiniment du nuage électronique et l'atome est dissocié.

5. On définit le moment dipolaire par $\vec{p} = q\vec{r}$. Donc :

$$\vec{p} = 4\pi a^3 \epsilon_0 \vec{E}_{\text{ext}}$$

Si $\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{0}$, alors $\vec{p} = \vec{0}$. Le moment dipolaire est donc un moment dipolaire induit : il n'existe que si le champ extérieur est non nul. C'est cohérent : il s'agit ici d'un modèle d'un atome isolé.

6. Par définition, on a

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_{\text{ext}} \iff \alpha = 4\pi a^3$$

On retrouve que α est de l'ordre du volume de l'atome ! A.N. : $\alpha = 4 \times 10^{-27} \text{ m}^3$

Remarque : On peut aussi calculer la valeur maximale de $\left\| \vec{E}_{\text{ext}} \right\| = 5.9 \times 10^9 \text{ V m}^{-1}$: ce champ électrique est très intense, il n'est pas réalisable en laboratoire. (On peut réussir à ioniser l'hélium, mais grâce à des processus quantiques, non classiques.)

Ex. 9 Expression d'une des forces de Van der Waals : force de Keesom

Un dipôle de moment dipolaire \vec{p}_1 est assimilé à un ensemble de deux charges ponctuelles $+q_1 > 0$ et $-q_1$ séparées d'une distance $2a$. On appelle position du dipôle la position du point à mi-distance des deux charges ponctuelles.

On place le dipôle en un point O de telle sorte que \vec{p}_1 soit aligné avec l'axe (Oz) . Ainsi : $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_z$ avec $p_1 > 0$.

- Rappeler la définition du moment dipolaire \vec{p}_1 en fonction de q_1 et de a .
- Par des considérations de symétrie, déterminer la direction en tout point de l'axe (Oz) du champ créé par ce dipôle. Etablir l'expression, au premier ordre non nul en a/z , du champ \vec{E}_1 créé en un point de coordonnées cartésiennes $(0, 0, z)$ avec $z \gg a$. On l'exprimera en fonction de p_1 , ϵ_0 et z .

On place désormais un second dipôle de moment \vec{p}_2 , de charge $q_2 > 0$ et de distance $2b$, parallèlement à l'axe (Oz) et à l'abscisse z (on a $z \gg a$ et $z \gg b$).

- On suppose que les deux dipôles sont de même sens : $\vec{p}_2 = p_2 \vec{e}_z$ avec $p_2 > 0$.
 - Etablir l'expression de la force exercée par le premier dipôle sur la charge $+q_2$ du second dipôle.
 - De même, établir l'expression de la force exercée par le premier dipôle sur la charge $-q_2$ du second dipôle.
 - En déduire que l'expression, au premier ordre non nul en a/z et en b/z , de la force exercée par le premier dipôle sur le second est :

$$\vec{F} = -\frac{3p_1 p_2}{2\pi \epsilon_0 z^4} \vec{e}_z$$

(d) On donne l'expression de la force exercée sur un dipôle \vec{p} par un champ extérieur \vec{E}_{ext} : $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}_{\text{ext}}$. Vérifier que cette expression est compatible avec celle trouvée à la question précédente. (On vient donc de démontrer la formule du cours dans un cas particulier.)

- Donner, sans calcul supplémentaire, la force exercée par le premier dipôle sur le second, dans le cas où le moment dipolaire $\vec{p}_2 = -p_2 \vec{e}_z$ est opposé au premier moment dipolaire.

Force de Keesom On considère deux molécules polaires distantes de z et on cherche la force exercée par l'une sur l'autre. On effectue pour cela un modèle simple dans lequel le moment dipolaire de la première molécule est constant et aligné avec l'axe (Oz) : $\vec{p}_1 = p_1 \vec{e}_z$. On considère également que le moment dipolaire de la seconde molécule ne peut prendre que deux valeurs $p_2 \vec{e}_z$ et $-p_2 \vec{e}_z$.

La probabilité que la seconde molécule ait le moment dipolaire \vec{p}_2 est donnée via le facteur de Boltzmann : $A \times \exp\left(\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1}{k_B T}\right)$ avec k_B la constante de Boltzmann, T la température et A une constante.

5. (a) On suppose que $|\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1| \ll k_B T$. Effectuer un développement limité à l'ordre 1 du facteur de Boltzmann. Sachant que seuls deux états sont possibles pour \vec{p}_2 , en déduire la valeur de A .
 (b) En déduire que la force moyenne exercée par la première molécule sur la seconde est :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{3p_1^2 p_2^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 k_B T} \frac{1}{z^7} \vec{e}_z$$

- (c) Décrire les caractéristiques de cette force de Van der Waals.

Correction de l'exercice 9

1. $\vec{p}_1 = q_1 \times 2a \vec{e}_z$

2. On se place en coordonnées cartésiennes.

- **Symétries** Pour un point M appartenant à l'axe (Oz), les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Donc, $\vec{E}_1 = E_1(0, 0, z) \vec{e}_z$
- On applique une procédure similaire au calcul du potentiel créé par un dipôle électrostatique, mais ici, on peut l'appliquer directement avec le champ électrique, car on connaît sa direction (on n'a pas le problème de travailler sur un point M quelconque). Par principe de superposition, on a :

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(z-a)^2} \vec{e}_z - \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(z+a)^2} \vec{e}_z \\ &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{z^2} \left(\frac{1}{(1-\frac{a}{z})^2} - \frac{1}{(1+\frac{a}{z})^2} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \left(1 + 2\frac{a}{z} - 1 + 2\frac{a}{z} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{q_1 a}{\pi\varepsilon_0 z^3} \vec{e}_z \\ &= \frac{p_1}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \vec{e}_z \end{aligned}$$

3. (a) La force exercée par le premier dipôle sur la charge $+q_2$ située en $z+b$ est : $\vec{F}_+ = +q_2 \times \vec{E}_1(z+b) = \frac{q_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0(z+b)^3} \vec{e}_z$

(b) De même, $\vec{F}_- = -\frac{q_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0(z-b)^3} \vec{e}_z$

- (c) La force totale exercée sur le second dipôle est :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_+ + \vec{F}_- \\ &= \frac{q_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{(z+b)^3} - \frac{1}{(z-b)^3} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{q_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \left(1 - 3\frac{b}{z} - 1 + 3\frac{b}{z} \right) \vec{e}_z \\ &= -\frac{6q_2 b p_1}{2\pi\varepsilon_0 z^4} \vec{e}_z \\ &= -\frac{3p_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0 z^4} \vec{e}_z \end{aligned}$$

- (d) Attention à ne pas se tromper sur le moment dipolaire et le champ électrostatique à considérer. On souhaite déterminer la force exercée sur le dipôle \vec{p}_2 par le champ créé par le dipôle 1. Donc :

$$\vec{F} = (\vec{p}_2 \cdot \text{grad}) \vec{E}_1 = p_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p_1}{2\pi\varepsilon_0 z^3} \vec{e}_z \right) = -\frac{3p_2 p_1}{2\pi\varepsilon_0 z^4} \vec{e}_z$$

Les deux expressions sont bien identiques !

Remarque : La logique est qu'à chaque fois que vous travaillez sur des champs créés ou subis par deux charges proches, et donc que vous faites un DL, la puissance sur z au dénominateur augmente : pour passer du champ créé par une charge ponctuelle à un dipôle, on passe de $1/z^2$ à $1/z^3$; pour passer de la force exercée par un dipôle sur une charge à la force exercée sur un dipôle, on passe de $1/z^3$ à $1/z^4$.

4. On peut se baser sur la formule fournie $(\vec{p}_2 \cdot \text{grad})\vec{E}_1$ ou sur la démonstration : un signe $-$ apparaît :

$$\vec{F}' = -\vec{F} = +\frac{3p_2p_1}{2\pi\epsilon_0 z^4}\vec{e}_z$$

5. (a) DL du facteur de Boltzmann : $\exp\left(\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1}{k_B T}\right) = 1 + \frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1}{k_B T}$. Dans la suite, je note $\vec{E}_1 = E_1\vec{e}_z$.

Si on se limite à ce DL à l'ordre 1 en $\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1}{k_B T}$, la somme des deux probabilités devant valoir 1 :

$$A\left(1 + \frac{p_2 E_1}{k_B T} + 1 - \frac{p_2 E_1}{k_B T}\right) = 1 \iff A = \frac{1}{2}$$

- (b) Le facteur de Boltzmann permet de comprendre que l'état le plus probable pour le deuxième dipôle est d'être aligné avec le champ \vec{E}_1 créé par le premier dipôle (c'est normal, c'est celui minimisant l'énergie potentielle du dipôle). Donc, la force moyenne sera bien non nulle et dans le sens $-\vec{e}_z$. Le calcul exact donne :

$$\begin{aligned} \langle \vec{F} \rangle &= \sum_{\text{états}} \text{force} \times \text{probabilité d'avoir cette force} \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(\frac{p_2 E_1}{k_B T}\right) \times \vec{F} + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{p_2 E_1}{k_B T}\right) \times \vec{F}' \\ &\underset{DL}{\simeq} \frac{1}{2} \frac{p_2 E_1}{k_B T} \vec{F} \times 2 \\ &= -\frac{p_2 p_1}{2\pi\epsilon_0 z^3 k_B T} \times \frac{3p_2 p_1}{2\pi\epsilon_0 z^4} \vec{e}_z \\ &= -\frac{3p_1^2 p_2^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 k_B T} \frac{1}{z^7} \vec{e}_z \end{aligned}$$

- (c) Cette force de Keesom (comme toutes les forces de Van der Waals) est : attractive, décroît en $1/z^7$ avec la distance (et n'est donc efficace qu'à très courte portée), et est d'autant plus intense que les moments dipolaires des molécules polaires considérées sont grands. (On démontre des propriétés que vous avez admises en chimie !)

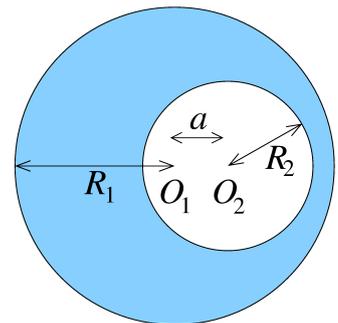
Ex. 10 Variation du champ gravitationnel à la surface d'une planète

1. Montrer que le champ gravitationnel créé par une boule de centre O , de rayon R et de masse volumique ρ uniforme à l'intérieur de cette boule peut s'écrire :

$$\vec{g}(M) = -\frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho\overrightarrow{OM}$$

\mathcal{G} est la constante de gravitation. Déterminer également l'expression de ce champ à l'extérieur de la boule.

On considère désormais le cas d'une boule de rayon R_1 et de masse volumique ρ_1 . À l'intérieur de cette boule est creusée une boule de rayon R_2 , dont le centre est décalé d'une distance a par rapport à celui de la grande sphère. Cette boule de rayon R_2 est donc constituée de vide.



2. Avec le théorème de superposition, exprimer le champ gravitationnel à l'intérieur de la sphère vide de centre O_2 .

On considère finalement une planète sphérique de rayon $R_1 = 1000$ km constituée principalement d'un matériau de masse volumique $\rho_1 = 8000$ kg m⁻³. À l'intérieur de cette sphère se trouve une boule de rayon R_2 , dont le centre est décalé d'une distance a par rapport à celui de la grande sphère, constituée d'un autre matériau de masse volumique $\rho_2 = 1000$ kg m⁻³.

On mesure le champ gravitationnel en tout point à la surface de la planète et on constate que celui-ci est minimal en un point A où il vaut 2.1129 ms⁻² et qu'il est maximal en un point B où il vaut 2.2216 ms⁻².

3. Placer A et B sur un schéma et montrer que les champs gravitationnels en A et en B s'expriment :

$$g_A = \frac{\mathcal{G}\rho_1 V_1}{R_1^2} - \frac{\mathcal{G}(\rho_1 - \rho_2)V_2}{(R_1 - a)^2} \quad (\text{Ex.23})$$

$$g_B = \frac{\mathcal{G}\rho_1 V_1}{R_1^2} - \frac{\mathcal{G}(\rho_1 - \rho_2)V_2}{(R_1 + a)^2} \quad (\text{Ex.24})$$

avec V_1 et V_2 les volumes des boules de rayons R_1 et R_2 .

4. Calculer alors la position a et la taille R_2 de la boule interne de masse volumique ρ_2 .

Correction de l'exercice 10

1. Calculons le champ créé par une unique boule de centre O , de rayon R et de masse volumique ρ . D'après l'étude classique d'invariances et de symétries, on peut chercher $\vec{g}(M) = g(r)\vec{e}_r$. Si $r \leq R$, le théorème de Gauss gravitationnel appliqué sur une surface sphérique de rayon r centrée sur O donne :

$$g(r)4\pi r^2 = -4\pi\mathcal{G}\rho\frac{4}{3}\pi r^3 \iff \vec{g} = \frac{4\pi\rho\mathcal{G}r}{3}\vec{e}_r = -\frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho\overrightarrow{OM} \quad (\text{Ex.25})$$

A l'extérieur de la boule le champ est :

$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}\rho V}{r^2}\vec{e}_r \quad \text{avec} \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

2. On utilise le théorème de superposition, avec $\rho_2 = -\rho_1$, de sorte que par superposition on ait bien une boule creuse. (Il n'est pas gênant d'introduire une masse volumique négative (sans sens physique), car tout découle d'une analogie avec l'électrostatique où la densité volumique de charges peut prendre n'importe quel signe.) On trouve, en faisant attention que les deux boules n'ont pas le même centre :

$$\vec{g}_{tot} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = \frac{4\pi\rho\mathcal{G}}{3}(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}) = \frac{4\pi\rho\mathcal{G}}{3}\overrightarrow{O_1O_2} \quad (\text{Ex.26})$$

Le champ dans le trou est donc constant.

3. On s'intéresse maintenant aux champs à l'extérieur des sphères, vu qu'on souhaite obtenir le champ en surface de la planète. Avec la Q.1, on connaît le champ gravitationnel créé par une boule i :

$$\vec{g}_i = -\frac{\mathcal{G}M_i}{r_i^2}\vec{e}_{r,i} \quad \text{avec} \quad M_i = \rho_i V_i \quad (\text{Ex.27})$$

Par conséquent, le champ résultant réel est la superposition des champs gravitationnels créés par les deux boules, avec la subtilité qu'il faut utiliser comme masse volumique $\rho_2 - \rho_1$ pour la 2e boule ! Le champ gravitationnel est alors maximal lorsque le point M est aligné avec O_1 et O_2 , le point A étant à droite de O_2 et le point B à gauche de O_1 . Et là, gros coup de bol, les vecteurs $\vec{e}_{r,i}$ sont identiques pour $i = 1$ ou 2 au point A . Il en va de même en B . On a donc en projection :

$$g_A = \frac{\mathcal{G}\rho_1 V_1}{R_1^2} - \frac{\mathcal{G}(\rho_1 - \rho_2)V_2}{(R_1 - a)^2} \quad (\text{Ex.28})$$

$$g_B = \frac{\mathcal{G}\rho_1 V_1}{R_1^2} - \frac{\mathcal{G}(\rho_1 - \rho_2)V_2}{(R_1 + a)^2} \quad (\text{Ex.29})$$

soit en notant $g_1 = \frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho_1 R_1 = 2.2351$ ms⁻² le champ généré par la boule de masse volumique ρ_1 seule, on obtient :

$$g_1 - g_A = \frac{\mathcal{G}(\rho_1 - \rho_2)V_2}{(R_1 - a)^2} \quad (\text{Ex.30})$$

$$g_1 - g_B = \frac{\mathcal{G}(\rho_1 - \rho_2)V_2}{(R_1 + a)^2} \quad (\text{Ex.31})$$

4. En faisant le quotient :

$$\frac{(R_1 - a)^2}{(R_1 + a)^2} = \frac{g_1 - g_B}{g_1 - g_A} = X^2 \iff \frac{R_1 - a}{R_1 + a} = X \iff a = R_1 \frac{1 - X}{1 + X} = 500 \text{ km} \quad (\text{Ex.32})$$

Puis pour trouver R_2 , il suffit de reprendre l'une des expressions qui précèdent :

$$R_2 = \frac{3}{4\pi} \left(\frac{(g_1 - g_A)(R_1 - a)^2}{\mathcal{G}(\rho_1 - \rho_2)} \right)^{1/3} = 126 \text{ km} \quad (\text{Ex.33})$$