

Sommaire

I Les quatre équations de Maxwell dans le vide	2
I.1 Loi de Maxwell-Gauss	2
I.2 Loi de Maxwell-Thomson (= loi de Maxwell-flux)	3
I.3 Loi de Maxwell-Faraday	3
I.4 Loi de Maxwell-Ampère	3
I.5 Nouvelle démonstration de l'équation de conservation de la charge	4
II Symétries et invariances	4
III Équation de conservation de l'énergie électromagnétique (= équation locale de Poynting)	5
Exercices	7

Questions de cours

- Démontrer la loi de Faraday à partir de l'équation de Maxwell-Faraday.
- Etablir l'équation locale de conservation de la charge à partir des équations de Maxwell.
- Citer l'équation locale de Poynting et interpréter les différents termes. Cas du vide en régime stationnaire.

Prise de notes : Dans ce chapitre : étude de distributions de charges et de courants variables : $(\rho(M,t), \vec{j}(M,t))$, créant un couple de deux champs : les champs électriques et magnétiques : $(\rho(M,t), \vec{j}(M,t)) \underbrace{\Rightarrow}_{?} (\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$. On parlera désormais d'électromagnétisme.



Histoire des sciences : développement long de l'EM durant des siècles. Maxwell a unifié plusieurs approches en une seule théorie au XIXème siècle, toujours utilisée, en rajoutant au passage le terme $\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ dans (MA) (qui aura un rôle crucial lors de l'étude des ondes EM et qu'on va interpréter dans ce chapitre). Notons que la formulation moderne des équations provient de Heaviside qui a synthétisé les 20 équations de Maxwell en 4 équations vectorielles.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Faire un bilan de toutes les équations de l'électromagnétisme dans le vide, en régime variable : quels théorèmes sont valables ?
2. Définir un vecteur densité de courant énergétique associé au champ électromagnétique (aussi appelé vecteur de Poynting) et réaliser des bilans énergétiques.

I Les quatre équations de Maxwell dans le vide

Résumons les quatre lois locales desquelles on est parti pour construire l'électromagnétisme, dans le cas général du régime variable dans le vide :

Équations de Maxwell dans le vide en régime variable



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Comme ces quatre équations sont linéaires, on peut toujours appliquer le principe de superposition pour déterminer \vec{E} et \vec{B} .

Notons un lien entre les deux constantes ε_0 et μ_0 (cf. chapitre O2 sur les ondes) :

Célérité de la lumière

$$\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$$

avec c la célérité de la lumière

I.1 Loi de Maxwell-Gauss

La loi de Maxwell-Gauss est inchangée par rapport au cas statique : le théorème de Gauss reste valable et relie le flux du champ électrique à travers une surface fermée et la charge $Q_{\text{int}}(t)$ contenue dans le volume délimité par cette surface

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M,t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0} \quad (\text{I.1})$$

I.2 Loi de Maxwell-Thomson (= loi de Maxwell-flux)

La loi de Maxwell-Thomson est inchangée par rapport au cas statique : le champ magnétique est toujours à flux conservatif, même si le flux peut dépendre du temps. Ainsi les lignes de champ magnétiques sont toujours bouclées sur elles-mêmes.

I.3 Loi de Maxwell-Faraday

a Loi de Faraday

On peut passer de la formulation locale à la formulation intégrale.

Intégrons l'équation de Maxwell-Faraday à travers une surface (S) immobile qui s'appuie sur un contour (Γ) fermé orienté :

$$\star \quad \iint_{(S)} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$\iff \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

en utilisant le théorème de Stokes.

Loi de Faraday

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt}$$

e est appelé force électromotrice et s'exprime en Volt. On admet que e est la tension le long du contour (Γ). Cette loi est à l'origine des phénomènes d'induction (cf. chapitres de sup et EM5).

b Potentiel électrique

Comme on n'a plus $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$, on ne peut plus relier le potentiel électrique V et le champ \vec{E} par : $\vec{E} = -\text{grad}(V)$. Cela se retrouve dans la loi de Faraday : il peut exister une tension induite non nulle le long d'un contour fermé.

I.4 Loi de Maxwell-Ampère

D'après le théorème de Stokes-Ampère, en considérant une surface (S) s'appuyant sur un contour fermé et orienté (Γ) :

$$\iint_{(S)} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

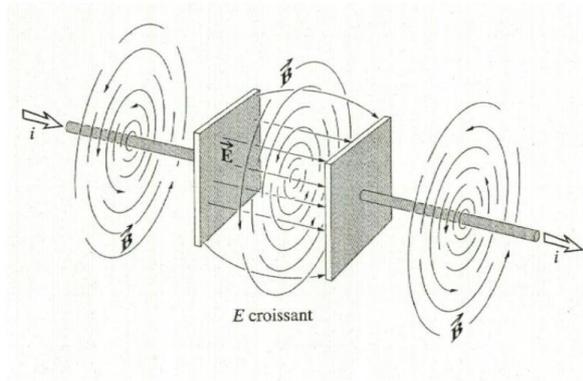
L'équation de Maxwell-Ampère en régime variable permet alors de ré-écrire le premier terme :

$$\iint_{(S)} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{(S)} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

En inversant l'intégrale et la dérivée temporelle, on en déduit la formulation du théorème d'Ampère en régime variable (différente de celle en statique) :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}(t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (\text{I.2})$$

Remarquons que c'est l'équation de Maxwell-Ampère en régime variable qui permet de justifier le "passage" du courant de part et d'autre d'un condensateur.



I.5 Nouvelle démonstration de l'équation de conservation de la charge

On peut vérifier que les équations de Maxwell sont bien compatibles avec l'équation de conservation de la charge, démontrée au chapitre EM1.

$$\begin{aligned}
 \star \quad \operatorname{div} \vec{j} &= \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{B})}_{=0} - \epsilon_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \\
 &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E}) \\
 &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \\
 &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0
 \end{aligned}$$

II Symétries et invariances

Désormais, la source du champ électrique n'est plus ρ : les sources de \vec{E} sont ρ ET $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$! De même, les sources du champ magnétique sont à la fois \vec{j} ET $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On parle de couplage électromagnétique.

Néanmoins, les conclusions obtenues en régime stationnaire se reconduisent en régime variable à condition de prendre en compte les plans de symétrie ou d'antisymétrie **communs à l'ensemble des distributions** (ρ, \vec{j}) :

- si à chaque instant t , (Π_S) est un plan de symétrie du couple (ρ, \vec{j}) , pour $M \in (\Pi_S)$, $\vec{E}(M, t)$ est contenu dans (Π_S) et $\vec{B}(M, t)$ lui est orthogonal ;
- si à chaque instant t , (Π_A) est un plan d'antisymétrie du couple (ρ, \vec{j}) , pour $M \in (\Pi_A)$, $\vec{E}(M, t)$ est orthogonal à Π_S et $\vec{B}(M, t)$ est contenu dans Π_A ;
- en cas d'invariance par translation ou rotation du couple (ρ, \vec{j}) , le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est indépendant du paramètre caractérisant la translation ou la rotation.

Exercice : On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge initiale q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est faiblement conducteur, de conductivité σ : la densité de charge ρ est nulle et la densité de courant \vec{j} est fournie par la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Comme aucune direction de l'espace n'est privilégiée, on suppose que : $\vec{j} = j(r, t) \vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

Réaliser une étude de symétries et invariances pour \vec{E} et \vec{B} .

★ Comme les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges ET de courant, $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$. Puis invariances par rotations : $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$

III Équation de conservation de l'énergie électromagnétique (= équation locale de Poynting)

On veut réaliser un bilan énergétique associé au champ électromagnétique. En effet, le champ électromagnétique transporte de l'énergie : nous avons déjà vu au travers de l'exemple du condensateur plan infini que la densité volumique d'énergie électrostatique s'écrivait $u_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \|\vec{E}\|^2$.

On va généraliser l'étude, en partant des équations de Maxwell et de l'information que la puissance volumique cédée aux porteurs de charges vaut $\vec{j} \cdot \vec{E}$. Exprimons donc \vec{j} que l'on multiplie scalairement par \vec{E} :

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \implies \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{B}) \cdot \vec{E} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \quad (\text{III.1})$$

.

★ Le dernier terme se réécrit $-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right)$ correspondant à la dérivée temporelle de la densité volumique d'énergie électrostatique. Conformément à la forme de toutes les équations locales de conservation, on cherche à faire apparaître la divergence d'un vecteur densité de courant énergétique.

Pour y parvenir, aidons-nous d'une formule (non exigible) d'analyse vectorielle :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{C}) = (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} \quad (\text{III.2})$$

soit :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu_0} \left(\text{div}(\vec{B} \wedge \vec{E}) + \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) = -\text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 \right) \quad (\text{III.3})$$

soit finalement :

$$\boxed{\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}} \quad (\text{III.4})$$

★

appelé vecteur de Poynting.

Préciser les unités : J m^{-3} , W m^{-2} .

Interprétation physique :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Entourer les termes :

- Variation de l'énergie EM liée :
- soit au flux sortant d'énergie EM lié à la propagation de l'onde
- soit à l'énergie cédée par les champs à la matière

Il s'agit donc d'une équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique. On appelle cette équation de conservation : l'équation locale de Poynting.

De même qu'à chaque fois que l'on a obtenu une équation de conservation, on peut interpréter physiquement le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$: il s'agit du vecteur densité de courant énergétique. Ainsi, l'énergie traversant une surface élémentaire $d\vec{S}$ orientée durant dt est :

$$\delta^2 \mathcal{E} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} dt$$

Autrement dit, la puissance transportée par une onde EM à travers une surface (S) est

★ :

$$P = \Phi = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Exercice : Redémontrer l'équation locale de Poynting en géométrie cartésienne unidimensionnelle, en réalisant un bilan d'énergie électromagnétique. On se servira pour cela de l'égalité entre puissance transportée et flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \Pi(x,t)\vec{e}_x$.

Schéma. On réalise un bilan énergétique sur la portion de milieu entre les abscisses x et $x + dx$ et entre t et $t + dt$.

Variation temporelle : ...

$$d^2\mathcal{E} = \frac{\partial u_{em}}{\partial t} S dx dt$$

Echanges spatiaux : ...

$$\delta^2\mathcal{E}_{ech} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} S dx dt$$

★

Terme de perte d'énergie :

$$\delta^2\mathcal{E}_{perdu} = \vec{j} \cdot \vec{E} S dx dt$$

Bilan de conservation :

$$d^2\mathcal{E} = \delta^2\mathcal{E}_{ech} - \delta^2\mathcal{E}_{perdu} \iff \frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Cas particulier du vide :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0 \quad (\text{III.5})$$

traduisant l'absence de dissipation d'énergie dans le vide.

Cas particulier du vide en régime stationnaire :

$$\text{div } \vec{\Pi} = 0 \quad (\text{III.6})$$

$\vec{\Pi}$ est à flux conservatif : le flux de $\vec{\Pi}$ se conserve le long d'un tube de champ : $\Phi_{entrant} = \Phi_{sortant}$.

Dans le cas où on peut distinguer plusieurs flux entrants et plusieurs flux sortants dans un système fermé, le bilan s'écrit alors :

$$\sum_i \Phi_{entrant,i} = \sum_j \Phi_{sortant,j}$$

Exercices

Ex. 1 Décharge d'un condensateur dans l'air

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge initiale q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est faiblement conducteur, de conductivité σ : la densité de charge y est nulle et la densité de courant y est fournie par la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. Comme aucune direction de l'espace n'est privilégiée, on suppose que : $\vec{j} = j(r,t)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

1. Déterminer la forme sous laquelle on cherche \vec{E} et \vec{B} à partir d'une étude de symétries et d'invariances.
2. Déterminer \vec{E} en fonction de $q(t)$ pour $r > R$.
3. Vérifier que le champ déterminé est compatible avec la loi de conservation de la charge électrique pour $r > R$. On utilisera le formulaire d'analyse vectorielle.
4. En utilisant l'une des équations de Maxwell, déterminer $q(t)$.
5. Selon vous, pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

Correction de l'exercice 1

1. On se place en coordonnées sphériques de centre O , le centre de la boule chargée. On considère un point M quelconque. Comme les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges ET de courant, $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{E} = E(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$. Puis invariances par rotations d'angles θ et φ : $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.
2. Pour $r > R$, l'application du théorème de Gauss à la sphère fermée de rayon r conduit à

$$\vec{E} = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (\text{Ex.1})$$

3. On calcule $\text{div } \vec{j} = \sigma \text{div } \vec{E}$ en utilisant l'expression de la divergence en coordonnées sphériques :

$$\text{div } \vec{j} = \sigma \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 E_r(r)}{\partial r} = 0$$

Or, dans l'air conducteur, aucune charge ne s'accumule : $\rho(M,t) = 0$. Donc, l'équation de conservation de la charge est respectée.

Remarque : Comment cela se fait-il que $\rho = 0$ alors qu'on a $\vec{j} \neq \vec{0}$ (c'est le cas dans tous les matériaux conducteurs usuels) ? Cela provient du fait que seuls les électrons libres sont mobiles dans un matériau conducteur, et non pas les cations fixes du réseau. Donc, au global, en tout point de l'espace, il y a autant de charges positives et négatives (électrons libres + cations) : $\rho = 0$; alors que les électrons se déplacent : $\vec{j} = n_e(-e)\vec{v}_e + \vec{0}$.

4. L'équation de Maxwell-Ampère nous donne une relation permettant de déterminer $q(t)$:

$$\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (\text{Ex.2})$$

c'est-à-dire en utilisant la loi d'Ohm et en projection selon \vec{e}_r :

$$\sigma q(t) + \epsilon_0 \frac{dq}{dt} = 0 \quad (\text{Ex.3})$$

On a une équation aux dérivées droites : on sait résoudre. En posant $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$, $q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$.

5. Si l'air est humide, il devient beaucoup plus conducteur, donc σ augmente : τ diminue. Les charges restent moins longtemps sur les conducteurs, ce qui complique les expériences d'électrostatique.

Ex. 2 Câble coaxial en régime stationnaire