Devoir de mathématiques n° 4.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'équation différentielle (E_n), d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$(n+1)y''(x) - (2n+1)y'(x) + ny(x) = 0.$$

1. Résoudre (E_n) sur $\mathbb{R}$. En déduire que l'unique solution y de (E_n) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est la fonction, notée f_n, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (n+1)e^x(1 - e^{-\frac{x}{n+1}}).$$

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on précisera.

3. Montrer à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que pour tout $u \leq 0$, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2}u^2$.

4. Soit $b > 0$. Déduire de 3. que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \dfrac{b^2 e^b}{2(n+1)}$ et justifier que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le segment $[0, b]$.

5. La fonction $f_n - f$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$? La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence R et la somme pour $x \in]-R, R[$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{n + (-1)^{n+1}}{n + (-1)^n} x^n$.

Exercice 3. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n+1}{2n^2 + n - 1}\, x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{4n+1}{2n^2+n-1} = \dfrac{a}{n+1} + \dfrac{b}{2n-1}$.

3. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

Exercice 4. **1.** Préciser le domaine de définition de $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

2. Déterminer le DSE(0) de f sur $]-1, 1[$. *Indication : commencer par écrire* $f(x) = (1+x)g(x)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de 2. la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Exercice 5. Soit $a > 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0, a[, \mathbb{R})$ telle que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, a[$, $f^{(p)}(x) \geq 0$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0, a[$. On pose : $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$.

0. Exprimer $R_n(x)$ sous la forme d'une intégrale en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale.

1. Soit $x \in [0, a[$. Vérifier que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et prouver qu'elle converge.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, a[$ et $y \in]x, a[$. Prouver que $R_n(x) \leq (\dfrac{x}{y})^{n+1} R_n(y)$.

Indication : Commencer par effectuer un changement de variable dans l'intégrale $R_n(x)$.

3. Déduire de 2. que $\forall x \in [0, a[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = f(x)$.

4. *Application.* Démontrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Partie facultative.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle x, de rayon de convergence 1.

On suppose que la série $\sum a_n$ converge et on pose, pour tout $x \in]-1,1]$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

• *Le cours sur les séries entières affirme seulement que f est continue sur l'intervalle* `ouvert` $]-1,1[$.

Le but de ce problème est de prouver que f est aussi continue (à gauche) en 1.

1. *Un cas simple.* Dans cette question, on suppose de plus que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}^+$.
Démontrer en utilisant le théorème de continuité du chapitre série de fonctions que f est continue sur $[0,1]$ (et donc à gauche en 1).

2. *On revient au cas général.* On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$,

$$r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p \text{ et } R_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p x^p.$$

2. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$.

2. 1. a. Justifier la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r_n x^n$.

2. 1. b. Montrer que $R_n(x) = r_n x^{n+1} + (x-1)\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} r_p x^p$.

2. 1. c. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|r_n| \leq \varepsilon$ et montrer que l'on a alors :

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in [0,1],\ |R_n(x)| \leq 2\varepsilon.$$

2. 2. Déduire de ce qui précède que f est continue sur $[0,1]$.

2. 3. *Application 1.* `[Une propriété sur le produit de deux séries]`

Soient $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n$ deux séries convergentes (mais pas a priori absolument convergentes).

Soit $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Prouver que si la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} c_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Indication : Utiliser les séries entières $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ et $\sum c_n x^n$.

2. 4. *Application 2.* Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. *Indication : considérer la série entière* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.