Devoir de mathématiques n° 5

Exercice 1. **1.** Soit g une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(7t+1) = g(t)$.

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(x) = g(\dfrac{x-(1+7+\cdots+7^{n-1})}{7^n})$.

1. b. En déduire que g est constante sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(7x+1) = 49f(x)$. *Indication : utiliser 1.*

Exercice 2. **1.** Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On note (E_g) l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$:

$$y'(x) + y(x) = g(x).$$

Montrer, en utilisant la méthode de la variation de la constante, que les solutions de (E_g) sur $[0,1]$ sont les applications :

$$y : x \mapsto Ce^{-x} + e^{-x}\int_0^x e^t g(t)\,dt,\ C \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. En remarquant que f est une solution évidente de l'équation différentielle $(E_{f'+f})$, déduire de la question **1.** précédente que :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t(f'(t)+f(t))\,dt.$$

• On note, pour tout $u \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $\|u\|_\infty = \max\limits_{x\in[0,1]} |u(x)|$ et on rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une *norme* sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

3. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) / f(0) = 0\}$. On pose, pour tout $f \in E$:

$$n(f) = \|f'+f\|_\infty \text{ et } N(f) = \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty$$

3. a. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et que n et N sont deux normes sur E.
3. b. Démontrer que n et N sont deux normes équivalentes sur E. *Indication : Utiliser 2.*

Exercice 3. Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$, deux fois dérivable :

$$(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + 9y(x) = 0.$$

1. Soit $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$, deux fois dérivable. On lui associe la fonction composée z définie sur $]0,\pi[$ par :

$$z(t) = y(\cos t),\ t \in]0,\pi[.$$

1. a. Soit $t \in]0,\pi[$. Calculer $z'(t)$ et $z''(t)$.

1. b. Prouver que y est solution de (E) sur $]-1,1[$ si et seulement si z est solution sur $]0,\pi[$ de :

$$(\mathcal{E}) : \qquad z''(t) + 9z(t) = 0.$$

2. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $]0,\pi[$.

3. a. Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos(3u) = 4\cos^3 u - 3\cos u$ et que $\sin(3u) = 3\sin u - 4\sin^3 u$.

3. b. Soit $x \in [-1,1]$. Simplifier $\cos(3\arccos x)$ et $\sin(3\arccos x)$.

4. Déterminer les solutions y de (E) sur $]-1,1[$. *On demande une expression simplifiée de ces solutions.*

Exercice 4. Soient $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3}\,dx$.

1. Justifier la convergence des intégrales généralisées I et J.

2. Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que $I = J$.

3. En déduire que $2I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$ et calculer I.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et 1-périodique. Pour tout $x > 0$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$.

1. Soit $x > 0$. Justifier que $I(x)$ converge absolument.

2. Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Vérifier que $\displaystyle\int_k^{k+1} e^{-xt} f(t)\, dt = e^{-xk} \int_0^1 e^{-xu} f(u)\, du$ et en déduire que $I(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-x}} \displaystyle\int_0^1 e^{-xu} f(u)\, du$.

3. *Etude de* $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} I(x)$. Soit $J = \displaystyle\int_0^1 f(u)\, du$. Distinguons deux cas :

3. a. On suppose $J \neq 0$. Prouver que $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} I(x) = +\infty$ si $J > 0$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} I(x) = -\infty$ si $J < 0$.

3. b. On suppose $J = 0$. Soit F l'unique primitive de f nulle en 0. Prouver que :

$$\lim_{x \to 0^+} I(x) = \int_0^1 F(u)\, du = -\int_0^1 u f(u)\, du.$$

Partie facultative.

Exercice 6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t. Soit $x \in]0, 1[$.

1. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} x^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ converge.

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{n=0}^{N^2+2N} x^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$.

Exercice 7. `[Inverse d'une série entière]`.

Soit $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ telle que $a_0 = 1$.

On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$.

1. Soit $r \in]0, R[$. Justifier l'existence d'une constante $M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n \leq M$.

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|b_n| \leq \dfrac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.

3. Prouver que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est au moins égal à $\dfrac{r}{M+1}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < \min(R, \dfrac{r}{M+1})$. Calculer le produit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.