Exercice 1.

1. a. et 1. b. (E_n) est une équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants. On vérifie que son équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes : 1 et $\frac{n}{n+1}$. Donc $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de (E_n) sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = ae^x + be^{\frac{n}{n+1}x}.$$

On a : $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ ssi $a + b = 0$ et $a + \frac{nb}{n+1} = 1$, c'est-à-dire ssi $a = n + 1$ et $b = -(n + 1)$.

Donc l'unique solution y de (E_n) telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ est bien la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = (n + 1)e^x - (n + 1)e^{\frac{n}{n+1}x} = (n + 1)e^x(1 - e^{-\frac{x}{n+1}}).$$

2. Rappelons que $e^t = 1 + t + t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. On a donc :

$$f_n(x) = (n + 1)e^x\left(\frac{x}{n + 1} + \frac{x}{n + 1}\varepsilon\left(\frac{x}{n + 1}\right)\right) = e^x\left(x + x\varepsilon\left(\frac{x}{n + 1}\right)\right)$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = xe^x$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{x}{n + 1}\right) = 0$. En d'autres termes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto xe^x$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $u \leq 0$ et M un majorant de $|f''|$ sur $[u, 0]$. L'inégalité de Taylor-Lagrange affirme que :

$$|f(u) - f(0) - uf'(0)| \leq M\frac{u^2}{2}.$$

En particulier, pour $f = \exp$, $|e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2}$ car $\exp(0) = 1$, $\exp'(0) = 1$ et on peut choisir $M = 1$ car $\forall t \in [u, 0], |\exp''(t)| = e^t \leq 1$.

4. *Remarque : $|f_n - f|$ étant continue sur le segment $[0, b]$, un théorème du cours assure que $|f_n - f|$ est majorée sur $[0, b]$.*

On a $|f_n(x) - f(x)| = |(n + 1)e^x(1 - e^{-\frac{x}{n+1}}) - xe^x| = (n + 1)e^x|e^{-\frac{x}{n+1}} - 1 + \frac{x}{n+1}|$. Considérons maintenant $x \in [0, b]$.

En utilisant l'inégalité de la question 3. avec $u = -\frac{x}{n+1} \leq 0$, on obtient bien que :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq (n + 1)e^x\frac{1}{2}\left(\frac{x}{n + 1}\right)^2 \left(= \frac{x^2e^x}{2(n + 1)}\right) \leq \frac{b^2e^b}{2(n + 1)}.$$

Notons $s_n = \sup\limits_{x\in[0,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{x\in[0,b]} |f_n(x) - f(x)|$ (toute fonction continue sur un segment atteint sa borne supérieure).

Comme $\frac{b^2e^b}{2(n+1)}$ est un majorant de la fonction $|f_n - f|$ sur $[0, b]$, on a $0 \leq s_n \leq \frac{b^2e^b}{2(n+1)}$ car s_n est, par définition, le plus petit des majorants de la fonction $|f_n - f|$ sur $[0, b]$. Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$ par le théorème des gendarmes, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge bien uniformément vers f sur le segment $[0, b]$.

5. La fonction $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f_n(x) - f(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty}(n + 1)e^x\left(1 - e^{-\frac{x}{n+1}} - \frac{x}{n + 1}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - e^{-\frac{x}{n+1}} - \frac{x}{n + 1}\right) = -\infty$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ car si tel était le cas, $f_n - f$ serait nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$ (au moins pour n assez grand).

Exercice 2. `1. Calcul du rayon de convergence` R.

Rappel. Une suite réelle (x_n) est majorée si et seulement si les deux suites (extraites) (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont majorées.

Posons $a_n = \dfrac{n + (-1)^{n+1}}{n + (-1)^n}$, $n \geq 2$. Pour tout $n \geq 2$, $a_n > 0$, et R est, par définition, la borne supérieure de l'intervalle

$$I_a = \{r \in \mathbb{R}^+ / \text{la suite} \,(|a_n|r^n)_{n\geq 2}\, \text{est majorée}\} = \{r \in \mathbb{R}^+ / \text{la suite} \,(a_nr^n)_{n\geq 2}\, \text{est majorée}\}.$$

Déterminons $I(a)$: Soit $r \in \mathbb{R}^+$. D'après le rappel, $r \in I(a)$ si et seulement si les deux suites $(a_{2n}r^{2n})_{n\geq 1}$ et $(a_{2n+1}r^{2n+1})_{n\geq 1}$ sont majorées, donc ssi les suites $\left(\frac{2n - 1}{2n + 1}r^{2n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(\frac{2n + 2}{2n}r^{2n+1}\right)_{n\geq 1} = \left((1 + \frac{1}{n})r^{2n+1}\right)_{n\geq 1}$ sont majorées. Donc $I(a) = [0, 1]$ et $\boxed{R = 1}$ car si $r > 1$, ces deux suites tendent vers $+\infty$ et si $r \in [0, 1]$, $(a_nr^n)_{n\geq 2}$ est majorée par 2 car la suite $(a_{2n}r^{2n})_{n\geq 1}$ est majorée par 1 et la suite $(a_{2n+1}r^{2n+1})_{n\geq 1}$ est majorée par 2.

`2. Calcul de la somme` $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_nx^n$ `pour` $x \in]-1, 1[$. Tout d'abord $\boxed{f(0) = 0}$ car $\forall n \geq 2,\ 0^n = 0$.

Soit $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=2}^{2N+1} a_nx^n = \sum\limits_{n=1}^{N} a_{2n}x^{2n} + \sum\limits_{n=1}^{N} a_{2n+1}x^{2n+1}$ d'où

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{2N+1} a_nx^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}}_{=g(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}}_{=h(x)}.$$

Les deux sommes précédentes $g(x)$ et $h(x)$ sont des sommes de séries convergentes que nous allons maintenant calculer :

$\triangleright$ $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{2}{2n + 1}\right)x^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^2)^n - \frac{2}{x}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n + 1} = \frac{x^2}{1 - x^2} - \frac{2}{x}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) - x\right) = \frac{x^2}{1 - x^2} - \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + 2.$

$\triangleright$ $h(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^{2n+1} = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(x^2)^n + x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = \frac{x^3}{1 - x^2} - x\ln(1 - x^2).$

Finalement, $\boxed{f(x)} = g(x) + h(x) = \boxed{\frac{x^2 + x^3}{1 - x^2} - \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) - x\ln(1 - x^2) + 2 = \frac{x^2 + x^3}{1 - x^2} - (1 + x^2)\frac{\ln(1 + x)}{x} + (1 - x^2)\frac{\ln(1 - x)}{x} + 2}.$

Remarque : La dernière égalité permet de retrouver que f est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 - 1 - 1 + 2 = 0 = f(0)$.

Exercice 3.

1. et 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $a_n = \frac{4n+1}{2n^2+n-1}$ et $u_n(x) = a_n x^n$. On a : $a_n > 0$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$, $a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $u_n(x) \neq 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| = |x|.$$

Donc d'après la règle de D'Alembert, si $|x| < 1$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument et si $|x| > 1$, la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement car $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n x^n| = +\infty$ ce qui implique que $u_n(x) \not\to 0$.

Notons D_f le domaine de définition de f. A ce stade du raisonnement, on a donc : $]-1,1[\subset D_f \subset [-1,1]$.
Il reste à examiner si f est définie en 1 et/ou -1 :

- $1 \notin D_f$ car la série $\sum a_n 1^n = \sum a_n$ diverge par la règle de l'équivalent positif puisque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
- $-1 \in D_f$ car la série $\sum (-1)^n a_n$ est une série alternée convergente par le critère des séries alternées.

En effet, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *décroissante* en tant que somme de deux suites clairement décroissantes car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{2n-1}$$

(réponse à la question **2**), et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

En conclusion, $D_f = [-1,1[$.

3. Soit $x \in]-1,1[$. On a donc : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1}$ (les deux sommes existent par D'Alembert).

Posons $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$. Si $x \neq 0$, on a :

$$g(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x}(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x) = \frac{1}{x}(-\ln(1-x) - x).$$

Posons $h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} \underset{[p=n-1]}{=} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{2p+1} = x\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{2p+1} \underset{[p=n]}{=} x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

- Si $x \in]0,1[$, $x = (\sqrt{x})^2$, $x^n = (\sqrt{x})^{2n}$ et :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}})$$

en utilisant le DSE(0) suivant démontré en exercice : $\forall t \in]-1,1[$, $\frac{1}{2}\ln(\frac{1+t}{1-t}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$.

- Si $x \in]-1,0[$, $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$, $x^n = (-1)^n(\sqrt{-x})^{2n}$ et :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{-x}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \arctan(\sqrt{-x}).$$

En conclusion :

$$\forall x \in]0,1[,\ f(x) = g(x) + 2h(x) = g(x) + 2xS(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1 + \sqrt{x}\ln(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}),$$

$$\forall x \in]-1,0[,\ f(x) = g(x) + 2h(x) = g(x) + 2xS(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} - 1 - 2\sqrt{-x}\arctan(\sqrt{-x}),$$

et $f(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 0^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.

Exercice 4.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \in D_f$ ssi $x \neq 1$ et $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 0$, c'est-à-dire ssi (i) : $1+x \geq 0$ et $1-x > 0$ ou (ii) : $1+x \leq 0$ et $1-x < 0$. Mais comme le système d'inéquations (ii) n'a pas de solution, on a donc : $D_f = [-1,1[$.

2. Soit $x \in]-1,1[$. En utilisant le DSE(0) de $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ avec $t = -x^2 \in]-1,0]$, on obtient :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1+x}{\sqrt{(1+x)(1-x)}} = (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
&= (1+x)(1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-(p-1))}{p!}(-x^2)^p) \\
&= (1+x)(1 + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3 \dots (2p-1)}{2^p p!} x^{2p}) \\
&= 1 + x + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3 \dots (2p-1)}{2^p p!} x^{2p} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3 \dots (2p-1)}{2^p p!} x^{2p+1}
\end{aligned}$$

Donc $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec : $a_0=1$, $a_1=1$ et pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $a_{2p}=a_{2p+1}=\dfrac{1\cdot 3\ldots(2p-1)}{2^p p!}=\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ ou encore avec pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a_{2p}=a_{2p+1}=\dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$ (car par convention $0!=1$). Par exemple, $a_4=\frac{4!}{2^4\cdot 2^2}=\frac{3}{8}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. D'après le cours sur les séries entières, le DSE(0) de f sur $]-1,1[$ est la série de Taylor de f en 0, c'est-à-dire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ou encore que $f^{(n)}(0)=n!a_n$. Donc d'après **2.** `si` n `est pair`, en posant $n=2p$, $p\in\mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(0)=f^{(2p)}(0)=(2p)!a_{2p}=\frac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2}=\frac{(n!)^2}{2^n((\frac{n}{2})!)^2}$$

et si n `est impair`, en posant $n=2p+1$, $p\in\mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(0)=f^{(2p+1)}(0)=(2p+1)!a_{2p+1}=\frac{(2p+1)((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2}=\frac{n((n-1)!)^2}{2^{n-1}((\frac{n-1}{2})!)^2}.$$

Exercice 5.

0. D'après la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in[0,a[$:

$$R_n(x)=f(x)-\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)}_{=S_n(x)}=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (1)$$

1. Fixons $x\in[0,a[$. La suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car, par hypothèse, $\forall p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}(0)\geq 0$ et donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_{n+1}(x)-S_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1}\in\mathbb{R}^+.$$

De plus $R_n(x)=\displaystyle\int_0^x\underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{\geq 0}\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\geq 0}\,dt\in\mathbb{R}^+$ car $R_n(x)$ est l'intégrale d'une fonction continue positive sur $[0,x]$.

Donc d'après (1), on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n(x)\leq f(x)$. Autrement dit, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $f(x)$.
La suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, croissante et majorée, converge donc vers un réel $\ell(x)\leq f(x)$ par le théorème de la limite monotone.

2. Effectuons le changement de variable : $u=\dfrac{y}{x}t$ dans l'intégrale $R_n(x)$. On obtient :

$$R_n(x)=\frac{x}{y}\int_0^y\frac{(x(y-u))^n}{y^n n!}f^{(n+1)}(\frac{x}{y}u)\,du=(\frac{x}{y})^{n+1}\int_0^y\frac{(y-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(\frac{x}{y}u)\,du.$$

La fonction $f^{(n+1)}$ est croissante sur $[0,a[$ car sa dérivée, la fonction $f^{(n+2)}$, est positive sur $[0,a[$.
Comme $0\leq\dfrac{x}{y}u<u<a$, on a en particulier $f^{(n+1)}(\frac{x}{y}u)\leq f^{(n+1)}(u)$ ce qui implique par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^y\frac{(y-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(\frac{x}{y}u)\,du\leq\int_0^y\frac{(y-u)^n}{n!}f^{(n+1)}(u)\,du$$

et donc finalement que : $R_n(x)\leq(\dfrac{x}{y})^{n+1}R_n(y)$.

3. Soit $x\in[0,a[$. Fixons un réel $y\in]x,a[$. D'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0\leq R_n(x)\leq(\frac{x}{y})^{n+1}f(y)$$

car $R_n(y)\leq f(y)$ par (1). Comme $\dfrac{x}{y}\in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{x}{y})^{n+1}=0$ et par le théorème des gendarmes :
$\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=f(x)$ par (1).

4. La fonction tangente est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I=[0,\frac{\pi}{2}[$. On constate que, pour tout $x\in I$,

$$\tan'(x)=1+\tan^2(x)\geq 0,\ \tan''(x)=(\tan^2)'(x)=2\tan(x)\cdot(1+\tan^2(x))\geq 0.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $\forall x\in I$, $\forall k\in\{0,\cdots,n\}$, $\tan^{(k)}(x)\geq 0$».
Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Initialisation. D'après ce qui précède, les propriétés $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies.
Hérédité. Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vraie pour un certain entier $n\in\mathbb{N}^*$. Montrons que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $\forall x\in I$, $\tan^{(n+1)}(x)\geq 0$.
Et c'est bien le cas d'après la formule de Leibniz, car pour tout $x\in I$ on a, grâce à $\mathcal{P}_n$:

$$\tan^{(n+1)}(x)=(\tan')^{(n)}(x)=(1+\tan^2)^{(n)}(x)=(\tan^2)^{(n)}(x)=(\tan\cdot\tan)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\underbrace{\tan^{(k)}(x)}_{\geq 0}\underbrace{\tan^{(n-k)}(x)}_{\geq 0}.$$

Par conséquent, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Les hypothèses de cet exercice sont donc vérifiées pour $f=\tan$ et $a=\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, d'après **3.**, on a pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$, $\tan(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Remarques.
a) Si k est un entier naturel pair, $\tan^k$ est impaire et donc $\tan^k(0)=0$. D'où :

$$\forall x\in[0,\frac{\pi}{2}[,\ \tan(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}. \qquad (2)$$

b) L'égalité (2) est également vraie pour $x\in]-\frac{\pi}{2},0]$ par imparité de la fonction tan.
En d'autres termes, tan est développable en série entière en 0 sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.