Spé PC. **Préparation de l'interrogation de mathématiques n° 4 (14. 11. 2024)**

Exercices à étudier [Voir la feuille d'exercices corrigés-équations différentielles]

Exercice 1. Soit $(E) : x\,y'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

1. Soit F l'unique primitive sur $]-1,1[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ telle que $F(0) = 0$.

1. a. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$.

1. b. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-x}{x^2}$.

2. Résoudre (E) sur $]0,1[$ et sur $]-1,0[$.

3. Prouver que (E) admet une unique solution sur $]-1,1[$ que l'on exprimera à l'aide de F.

Exercice 2. Soit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}\, a_{n-1}$.

1. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

2. Etudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

4. On pose pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

4. a. Vérifier que pour tout $x \in]-R,R[$, $(1-x)f'(x) = (2x+1)f(x)$.

4. b. En déduire $f(x)$.

5. En déduire une expression de a_n en fonction de n (sous la forme d'une somme).

Exercice 3. **1.** Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + y' + y = e^x$.

2. On pose : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
En déduire $f(x)$.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $(E)\ :\ y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = \dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$ en posant : $y(x) = e^{-3x}z(x)$ (méthode de Lagrange).

Exercice 5. [Solutions DSE(0) d'une équation différentielle]

Soit (E) l'équation différentielle, d'inconnue y : $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x)$.
Montrer que (E) admet une seule solution DSE(0) sur $]-1,1[$ et l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.