Spé PC **Interrogation de mathématiques n° 4 (14. 11. 2024)** **Durée : 35 mn**

Exercice 1. `[3 points]` Résoudre sur $]0,1[$: $(E) : x\,y'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Exercice 2. `[5 points]` 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + y' + y = e^x$.

2. On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
En déduire $f(x)$.

Exercice 3. `[4 points]` Soit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}\,a_{n-1}$.
• On admet que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est égal à 1 et on pose :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $(1-x)f'(x) = (2x+1)f(x)$.
2. En déduire $f(x)$.

Exercice 4. `[3 points]` Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = \dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$, d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, en posant : $y(x) = e^{-3x}z(x)$ (méthode de Lagrange).

Exercice 5. `[6 points]` Soit (E) l'équation différentielle, d'inconnue y : $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$.

1. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0,+\infty]$. Posons : $\forall x \in]-R,R[$, $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Montrer que y est solution de (E) sur $]-R,R[$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$.

2. Déterminer les solutions DSE(0) de (E).