Exercice 1. `[3,5 points]` ▷ On rappelle que pour tout $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Prouver que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et préciser $\zeta'(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 2. `[4,5 points]` Compléter sans les démontrer les égalités suivantes :

1. $\forall x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ldots$.

2. $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \ldots$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \ldots$.

4. $\forall t \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \ldots$.

5. $\forall t \in]-1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \ldots$.

Exercice 3. `[2 points]` • *On admet que le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n \geq 0} n^2 x^n$ *est égal à* 1.

Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.

Exercice 4. `[2 points]` • *On admet que le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!} x^n$ *est égal à* $+\infty$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!} x^n$.

Exercice 5. `[3 points]` • *On admet que le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$ *est égal à* 1.

Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 6. `[3 points]` • *On admet que le rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 + \cdots + n}$ *est égal à* 1.

Soit $x \in]-1, 1[$. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + \cdots + n}$.

Exercice 7. `[2 points]` Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 8. `[1 point]` Soit $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$.