Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 7.

A. Equations différentielles linéaires scalaires du 1er ordre à coefficients continus.

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$: **a.** $ty'(t)-y(t)=t\ln t$, **b.** $2ty'(t)+y(t)=\dfrac{1}{t}$, **c.** $xy'(x)+2y(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, **d.** $xy'(x)+y(x)=\ln(x)$, **e.** $x^3y'(x)-x^2y(x)=1$, **f.** $(1+x^2)y'(x)+2xy(x)=1+x\ln x-x$, **g.** $xy'-(x+1)y=(x^2+1)e^x$. **h.** $xy'-y=x^3e^x$, **i.** $xy'+y=\arctan x$.

2. Résoudre sur $]-1,1[$ le problème de Cauchy : $(1-x^2)y'+(x-2)y=0$, $y(0)=1$.

3. Soit (E) : $xy'+y+\tan x=0$.

3. a. Résoudre (E) sur $I=]-\frac{\pi}{2},0[$ et $]0,\frac{\pi}{2}[$.

3. b. Montrer que (E) admet une unique solution sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ que l'on précisera.

4. Soit (E) : $(e^x-1)y'+e^xy=1$.

4. a. Résoudre (E) sur $I=]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

4. b. Montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on précisera.

5. Déterminer les solutions développables en série entière sur $]-1,1[$ de (E) : $2xy'+y=\dfrac{1}{1+x}$.

6. Soit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0=a_1=1$ et $\forall n\geq 1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{2}{n+1}\,a_{n-1}$.

6. a. Prouver que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1\leq a_n\leq n^2$.

6. b. Etudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. c. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_nx^n$.

6. d. On pose pour tout $x\in]-R,R[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$.

Vérifier que pour tout $x\in]-R,R[$, $(1-x)f'(x)=(2x+1)f(x)$. En déduire $f(x)$.

7. Soit $a_n=\binom{2n}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

7. a. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_nx^n$.

On pose, pour tout $x\in]-R,R[$, $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$.

7. b. Vérifier que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1}-4na_n=2a_n$.

7. c. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ et montrer que $\forall x\in]-R,R[$, $(1-4x)f'(x)=2f(x)$.

7. d. En déduire $f(x)$, $x\in]-R,R[$.

B. Equations différentielles linéaires scalaires du 2ème ordre à coefficients constants.

8. Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''-2y'+y=x^ne^x$, où $n\in\mathbb{N}^*$. **9.** Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''+y'-2y=xe^{-2x}$, **10.** Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''-2y'+y=x^2+x+1$, **11.** Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''+y'-2y=\cos x$, **12.** Résoudre sur $]0,+\infty[$: $y''+2y'+y=e^{-x}\ln x$. **13.** Résoudre sur $\mathbb{R}$: $y''+4y=\cos(2x)$.

C. Equations différentielles linéaires scalaires du 2ème ordre à coefficients continus.

14. Résoudre sur $]0,+\infty[$: $x^2y''-2y=3x^2$ en remarquant que $x\mapsto x^2$ est une solution de l'équation homogène.

15. Résoudre sur $]-1,+\infty[$: $(x+1)^2y''+(x+1)y'-y=3(x+1)^2$.
Indication : rechercher une fonction affine solution de l'équation homogène.

16. Résoudre sur $]0,+\infty[$: $xy''-2y'+(2-x)y=(x-1)e^{-x}$.
Indication : remarquer que $x\mapsto e^x$ est solution de l'équation homogène.

17. Soit (E) : $4xy''+2y'-y=0$. Déterminer les solutions DSE(0) de (E) puis résoudre (E) sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

18. *Equation d'Euler.* Résoudre sur $I=\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$: $x^2y''+3xy'+5y=0$ en effectuant le changement de fonction : $z(t)=y(\varepsilon e^t)$, $t\in\mathbb{R}$, avec $\varepsilon=-1$ si $I=\mathbb{R}_-^*$ et $\varepsilon=1$ si $I=\mathbb{R}_+^*$.

19. Soit $q\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit (E) l'équation différentielle d'inconnue $y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $y''+q(x)y=0$.
On note S l'ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1. Préciser la nature de S.
On note y_1 et y_2 les deux *solutions* de (E), définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que :
$y_1(0)=1, y_1'(0)=0$ et $y_2(0)=0, y_2'(0)=1$.
2. Enoncer le théorème du cours justifiant l'existence et l'unicité de y_1 et y_2.
3. a. Prouver que la famille (y_1,y_2) est une base de S.
3. b. Montrer que $y_1y_2'-y_1'y_2$ est une fonction constante que l'on précisera.
4. On suppose dans cette question que q est paire.
4. a. Vérifier que si $y\in S$, l'application z définie par : $\forall x\in\mathbb{R}$, $z(x)=y(-x)$ appartient aussi à S.
4. b. En déduire que y_1 est paire et que y_2 est impaire.

D. Divers.

1. Déterminer les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=x$.

2. Déterminer les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-2\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,dt=1$.

3. Déterminer les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x))$.