Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 8.

Exercice 1. **1.** Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$. Prouver que f est continue en $(0,0)$.

2. Soit $g(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $g(0,0)=0$. Prouver que g est continue en $(0,0)$.

Exercice 2. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{y-x}$ si $x\neq y$ et $f(x,y)=0$ si $x=y$.

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x+x^2)$. En déduire que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. *On rappelle que* $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ 2ab\leq a^2+b^2$.

Exercice 4. Calculer : 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(\sqrt{|xy|})}{y}$, 2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$, 3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x\sin(y)-y\sin(x)}{x^2+y^2}$.

Exercice 5. Soit $U=]0,1[\times]0,1[$. Soit $f:U\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x}$ si $x>y$, $\dfrac{x^2}{y}$ si $x<y$ et x si $x=y$.
Montrer que f est continue sur U en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 6. Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par : $g(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ si $x\neq y$, et $g(x,x)=f'(x)$.
Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$ en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 7. **1.** Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n}$ où E est l'application partie entière. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall r\in\mathbb{Q},\ f(r)=g(r)$. Prouver que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)$.
Exercice 8. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Application. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(0)=1$ et $g(x)=\dfrac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ si $x>0$. Justifier que g est majorée sur $\mathbb{R}^+$.
Exercice 9. Déterminer $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que : 1) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=-f(x)$, 2) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x+1)=f(x)$, 3) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x^2)=f(x)$.
Exercice 10. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall t\in\mathbb{R},\ f(3t+5)=f(t)$.

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f(x)=f(\dfrac{x-5(1+3+\cdots+3^{n-1})}{3^n})$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x-5(1+3+\cdots+3^{n-1})}{3^n}$.

3. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.
Exercice 11. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, et telle que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(x)+f(y)$.
1. Calculer $f(0)$ et justifier que f est impaire.
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$. *Indication : utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité.*
3. Soit $x\in\mathbb{R}$. Prouver que $\forall p\in\mathbb{Z},\ f(px)=pf(x)$. En déduire que $\forall r\in\mathbb{Q},\ f(r)=rf(1)$.
4. Prouver finalement qu'il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=ax$.
Exercice 12. Déterminer toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=2f(x)$.
Exercice 13. **1.** Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f([a,b])\subset[a,b]$. Démontrer qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$.
2. Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $[a,b]\subset f([a,b])$. Démontrer qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$.
Exercice 14. Soit $f\in\mathcal{C}^0([0,1],[0,1])$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=x^n$.
Exercice 15. Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ et f une application continue de C dans $\mathbb{R}$.
Soit $(u,v)\in C^2$ tel que $f(u)<f(v)$ et y un réel tel que $f(u)<y<f(v)$. Prouver qu'il existe $w\in C$ tel que $y=f(w)$.
Exercice 16. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $|f|=|g|$ et $\forall x\in I,\ f(x)\neq 0$.
Montrer que $f=g$ ou $f=-g$.
Exercice 17. Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0)=f(1)$.
1. a. Prouver qu'il existe $x\in[0,\frac{1}{2}]$ tel que $f(x+\frac{1}{2})=f(x)$.
1. b. *Application.* Un marcheur parcourt 4 km en 1h. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure exactement pendant lequel il aura parcouru exactement 2km. On suppose seulement que la loi horaire est continue.
2. Prouver qu'il existe $x\in[0,\frac{2}{3}]$ tel que $f(x+\frac{1}{3})=f(x)$. Généraliser.
Exercice 18. Soient $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,x^2+y^2=1\}$ et f une application continue de C dans $\mathbb{R}$.
1. Soit $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\ \theta\mapsto f(\cos\theta,\sin\theta)$. Montrer que g est continue sur $[0,2\pi]$ avec la caractérisation séquentielle de la continuité.
2. Démontrer qu'il existe $(x,y)\in C$ tel que $f(-x,-y)=f(x,y)$.
Exercice 19. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g deux applications lipschitziennes de I dans $\mathbb{R}$.
1. Dans cette question, $I=[a,b]$ est un segment. Montrer que le produit fg est une application lipschitzienne sur $[a,b]$.
2. Dans cette question, $I=\mathbb{R}$. Montrer que fg n'est pas nécessairement une application lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
Indication : considérer $f=g=Id_{\mathbb{R}}$.
Exercice 20. Soit $(f,g)\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2$. Montrer que $M:x\mapsto\max\limits_{t\in[a,b]}(f(t)+xg(t))$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21. On pose, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=4+x+y+xy$.
Justifier que f est bornée sur $C=[-1,1]^2$ et atteint ses bornes. Calculer $\min\limits_{(x,y)\in C}f(x,y)$ et $\max\limits_{(x,y)\in C}f(x,y)$.
Exercice 22. Soient E un espace vectoriel de dimension finie normé et $(f,g)\in\mathcal{C}^0(E,\mathbb{R})^2$.
Montrer que $U=\{u\in E/f(u)>2g(u)\}$ est un ouvert de E.

Exercice 23. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$, et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Justifier que $g \circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I$, $g(x) > f(x)$.

1. Dans cette question, $I = [a,b]$ est un segment. Justifier l'existence d'un réel $m > 0$ tel que $\forall x \in [a,b]$, $g(x) \geq f(x) + m$.

2. Dans cette question, $I = \mathbb{R}$. Existe-t-il un réel $m > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq f(x) + m$?

Exercice 25. Soient $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ et $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$. Prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \dfrac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$.

Exercice 26. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ admet un point fixe. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 27. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Justifier l'existence d'un réel $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 28. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x) + g(y)$.
Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29. Soit a, b, c trois réels non nuls. Justifier l'existence puis calculer $M = \max\limits_{(x,y,z)\in F} |ax + by + cz|$ dans les cas suivants :
1) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, 2) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / |x| + |y| + |z| = 1\}$, 3) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \max(|x|,|y|,|z|) = 1\}$.

Exercice 30. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, C une partie fermée et bornée de E et f une application de C dans C telle que $\forall (u,v) \in C^2$, $u \neq v \Rightarrow \|f(u) - f(v)\| < \|u - v\|$.

1. Soit $g : C \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \|f(x) - x\|$.

1. a. Justifier l'existence d'un vecteur $c \in C$ tel que $\forall u \in C$, $g(u) \geq g(c)$.

1. b. Prouver que $g(c) = 0$. *Indication : raisonner par l'absurde.*

2. Prouver qu'il existe un unique $x \in C$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 31. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)\cos(x)$.

1. Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Justifier que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et préciser la valeur de $g^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^k})$.

Vérifier que $u_n(x)\sin(\dfrac{x}{2^n}) = \dfrac{1}{2^n}\sin x$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = g(x)$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) = f(\dfrac{x}{2^n})u_n(x)$.
En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = cg(x)$.

Exercice 32. Soient $(E, \|\,\|)$ un evn, a un vecteur non nul de E, et f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \|x - a\| \text{ si } \|x\| \leq \|a\| \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Soit $x \in E$. Comparer $\|f(x) - f(a)\|$ et $\|x - a\|$. En déduire que f est continue en a.

2. Montrer que f n'est pas continue en $-a$. *Indication* : considérer $-(1 + \frac{1}{n})a$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Indications et/ou corrigés.

Exercice 5. *i*) Soit $(x,y) \in U$ tel que $x > y$. Vérifions que f est continue en (x,y) avec la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $((x_n,y_n))$ une suite de U telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (x,y)$ i.e. telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n - y_n = x - y > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n > y_n$. Donc pour tout $n \geq N$, $f(x_n,y_n) = \dfrac{y_n^2}{x_n}$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n^2}{x_n} = \dfrac{y^2}{x} = f(x,y)$.

On montre de même que f est continue en tout couple $(x,y) \in U$ tel que $x < y$.

ii) Soit $x \in]0,1[$. Montrons que f est continue en (x,x) en utilisant à nouveau la caractérisation séquentielle de la continuité. Soit $((x_n,y_n))$ une suite de U telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (x,x)$, i.e. telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = x$.
Pour tout entier n, on a

$$|f(x_n,y_n) - f(x,x)| \leq |\frac{y_n^2}{x_n} - x| + |\frac{x_n^2}{y_n} - x|$$

car $|f(x_n,y_n) - f(x,x)| = |\frac{y_n^2}{x_n} - x|$ si $x_n > y_n$ et $|f(x_n,y_n) - f(x,x)| = |\frac{x_n^2}{y_n} - x|$ si $x_n \leq y_n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = f(x,x)$ par le théorème des gendarmes car $\lim\limits_{n\to+\infty} |\dfrac{y_n^2}{x_n} - x| + |\dfrac{x_n^2}{y_n} - x| = 0$.

Exercice 6. **1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^2$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n,y_n) = (x,x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence d'un réel $c_n \in [x_n,y_n]$ (ou $[y_n,x_n]$) tel que $g(x_n,y_n) = f'(c_n)$. En déduire que g est continue en (x,x).

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$. Montrer que g est continue en (x,y).

Exercice 7. 1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$ par le théorème des gendarmes.

2. Justifier que $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n})$ et $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n})$ et conclure.

Exercice 10. 1. Récurrence sur n.

2. Soit $a \neq 1$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + a + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

Posons $x_n = \dfrac{x - 5(1 + 3 + \cdots + 3^{n-1})}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc : $x_n = \dfrac{x}{3^n} - \dfrac{5}{3^n}\dfrac{3^n - 1}{2} = \dfrac{x}{3^n} - \dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2 \cdot 3^n}$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\dfrac{5}{2}$.

3. Considérons un réel x quelconque. Comme f est continue en $-\frac{5}{2}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(-\dfrac{5}{2})$ par la caractérisation séquentielle de la continuité. Mais la suite $(f(x_n))$ est constante d'après **1.** car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_n) = f(x)$. On a donc aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x)$ (une suite constante converge ... vers la constante) Donc, par unicité de la limite de la suite convergente $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, $f(x) = f(-\frac{5}{2})$. Et comme cette égalité est vraie pour n'importe quel réel x, f est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Considérer $g_n : x \mapsto f(x) - x^n$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 15. Considérer la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f((1-t)u + tv)$.

Exercice 16. Considérer la fonction $\dfrac{g}{f}$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 17. 2. Considérer $g(x) = f(x + \frac{1}{3}) - f(x)$ pour $x \in [0, \frac{2}{3}]$. Calculer $g(0) + g(\frac{1}{3}) + g(\frac{2}{3})$ et conclure avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 18. 2. Considérer $h(\theta) = g(\theta + \pi) - g(\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$ et utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 19. 2. Remarquer que $f(x)g(x) - f(y)g(y) = f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))$.

Exercice 20. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Remarquer que $\forall t \in [a, b]$, $f(t) + xg(t) = f(t) + yg(t) + (x - y)g(t)$.

Exercice 21. Remarquer que $f(x, y) = 3 + (1 + x)(1 + y)$.

Exercice 25. Soit $[m, M] = f([a, b]) = \{f(x)/x \in [a, b]\}$. Remarquer que $\dfrac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \in [m, M]$ et conclure.

Exercice 26. Raisonner par l'absurde en supposant donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq x$. Justifier (avec le TVI) qu'on a :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x$ ou bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$ et obtenir une contradiction.

Exercice 27. Justifier l'existence d'un réel $a > 0$ tel que $\forall x > a$, $f(x) \geq f(0)$ et considérer la borne inférieure de f sur $[0, a]$.

Exercice 31. 1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Par le DSE(0) de sin : $g(x) = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$.

De plus $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{0^{2n}}{(2n+1)!} = 1 = g(1)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ et g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par propriété de la somme d'une série entière. Cette série entière est la série de Taylor de g (paire) en 0. Donc : $\dfrac{g^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$, c'est-à-dire $g^{(2n)}(0) = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ et $g^{(2n+1)}(0) = 0$. Autrement dit, si n est impair, $g^{(n)}(0) = 0$ et si n est pair, $g^{(n)}(0) = \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n+1}$.

2. *i)* Récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\sin t \cos t = \frac{1}{2}\sin(2t)$.

ii) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$, il existe $N(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N(x)$, $\dfrac{x}{2^n} \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$ et $u_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^n})}$ car $\sin(\frac{x}{2^n}) \neq 0$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\sin x}{\sin(\frac{x}{2^n})} = \dfrac{\sin x}{x} = g(x)$ car $\sin(\dfrac{x}{2^n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{2^n}$. En outre $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(0) = 1 = g(0)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(0) = 1$.

3. *i)* L'égalité demandée s'établit facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\dfrac{x}{2^n}) = f(0)$ car f continue en 0, et, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $f(x) = f(\dfrac{x}{2^n})u_n(x)$, on obtient $f(x) = cg(x)$ où $c = f(0)$.