Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n$^{\text{o}}$ 9.

Exercice 1. Nature des intégrales généralisées suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\Big(\frac{x^2+1}{x^2-1}\Big)\,dx$, 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{x^3+1}-x)\,dx$, 3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\,dx$, 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}\,dx$, 5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^5-1}}$, 6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)\,dx$,
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)\,dx$, 8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}$, 9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$, 10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln x)^2 e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$, 11. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t+t^2e^{-t}}$,
12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$, 13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+e^x)}}$, 14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh} x}\,dx$, 15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$, 16. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$,
17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{5}{2}}}\,dx$, 18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2}\,dt$, 19. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x(1+x^2)}\,dx$, 20. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\Big(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\Big)\,dx$, 21. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\arctan x}{x(1+x^2)\arctan x}\,dx$,
22. $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\Big(\cos\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big)\,dx$, 23. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t-t^2)\,dt$, 24. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,e^{-t}\,dt$, 25. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^6}}$, 26. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2e^{-x}}{x^2+e^{-2x}}\,dx$, 27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^3+x^2}\,dx$.

Exercice 2. 1. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}\,dt$ converge.

2. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^x+a\sin x}{x^2}\,dx$ soit convergente.

3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{t}-t^2)^\alpha}$ converge.

4. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)\,\arctan x}{x^\alpha}\,dx$ converge.

5. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,dt$ converge.

6. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+e^{-x})}{x^\alpha}\,dx$ converge.

7. Déterminer les réels α pour lesquels $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}\,dx$ converge.

8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Etudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{(t^2-1)^\alpha}\,dt$ en fonction du paramètre α.

9. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)-\cos(x)}{x^\alpha}\,dx$ converge.

10. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\Big(e^{\frac{1}{x}}-\cos\Big(\sqrt{\frac{2}{x}}\Big)\Big)\,dx$ converge.

Exercice 3. Existence et calcul des intégrales suivantes : 1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$, 2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx$, 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$,
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$, 6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$, 7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$, 8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x+4}$, 9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$, 10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $(t=\frac{1}{x})$,
11. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^\alpha}$ avec $\alpha>0$ $(t=\frac{\pi}{2}-x)$, 12. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)}$, $n\in\mathbb{N}$, $(t=\frac{1}{x})$, 13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ $(x=\operatorname{ch} t)$.
14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x+x^2}\,dx$ $(t=\frac{1}{x})$, 15. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\Big(1+\frac{3}{1+x^2}\Big)\,dx$ (IPP), 16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-(x+1)e^{-x}}{x^2}\,dx$.

Exercice 4. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx$ converge.

Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x}\,dx$.

Exercice 5. Soit $f \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ existe.

Prouver que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$ existe.

Exercice 6. Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Existence et calcul de $I=\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$.
Indication : commencer par effectuer le changement de variable $x=(1-t)a+tb$, $t\in[0,1]$.

Exercice 7. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On pose : $B(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.
1. Montrer que $B(x,y)$ existe si et seulement si $x>0$ et $y>0$.
2. Calculer $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
3. Soient $x>0$ et $y>0$. Montrer que $B(x,y)=B(y,x)$ et que $B(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}B(x,y)$.

Exercice 8. 1. Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge. On note désormais $f(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.
2. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser f'.

3. Justifier que pour tout $x\geq 1$, $f(x)\leq e^{-x}$. En déduire la convergence de l'intégrale généralisée $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

4. Calculer I.

Exercice 9. `[La fonction Gamma]`. On pose : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.
1. Prouver que $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.
2. Vérifier que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10. Soient $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,dx$.
1. Montrer que I et J existent et que $I = J$.
2. En considérant $I + J$, calculer I.

Exercice 11. Soit $x > 0$. On pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}dt$.
1. Justifier l'existence de $f(x)$.
2. En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, montrer que $f(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+x^2u^2}du = -\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})$.
3. En déduire $f(1)$ puis $f(x)$, en utilisant le changement de variable $v = xu$ dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+x^2u^2}du$.

Exercice 12. 1. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.
2. En déduire l'existence de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$.

Exercice 13. Soit $f \in \mathcal{C}^0([1,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, décroissante et intégrable sur $[1,+\infty[$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. *Indication : comparer* $\dfrac{x}{2}f(x)$ *et* $\displaystyle\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt$.

Exercice 14. Etudier l'intégrabilité sur $]0,+\infty[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}\sin(\frac{1}{x^2})}{\ln(1+x)}$.

Exercice 15. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} E(x)e^{-x}\,dx$ où E est la fonction partie entière.

Exercice 16. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x}dx$.
1. Prouver que I existe.
2. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{2\varepsilon}^{3\varepsilon} \frac{\cos y}{y}dy$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_{2A}^{3A} \frac{\cos y}{y}dy$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 17. 1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t - t}{t^2}\,dt$ converge.
2. a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t$.
2. b. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$.
3. Justifier l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2}\,dt$ et calculer I en linéarisant $\sin^3 t$.

Exercice 18. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{1+it}\,dt$ où $i^2 = -1$.
1. Justifier que I n'est pas absolument convergente.
2. Montrer que I converge en intégrant par parties.

Exercice 19. Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ existe. Montrer que $\ell = 0$.

Exercice 20. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que f^2 et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
1. Prouver que ff' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(f(x)^2 - f(0)^2) = \int_0^{+\infty} f(t)f'(t)\,dt$.
3. Prouver finalement que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 21. Soient f, g, h trois fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que f et h soient intégrables sur I et $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Montrer que g est intégrable sur I.

Exercice 22. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,dt$.

Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} (t-n)f'(t)\,dt$. En déduire que si f' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) converge.