Exercice 1. Soit (E) : $x\,y'(x) + y(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

1. Soit F l'unique primitive sur $]-1,1[$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ telle que $F(0) = 0$.

1. a. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$.

1. b. Calculer $F(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-x}{x^2}$.

2. Résoudre (E) sur $]0,1[$ et sur $]-1,0[$.

3. Prouver que (E) admet une unique solution sur $]-1,1[$ que l'on exprimera à l'aide de F.

Solution. **1. a. et 1. b.** On obtient $a = b = \frac{1}{2}$ et $\forall x \in]-1,1[$, $F(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \Big(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\Big)\,dt = \frac{1}{2}(-\ln(1-x) + \ln(1+x)) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)$.
On a : $F(x) = x + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3)$ (directement à partir du DSE(0) de $F(x)$ ou en utilisant le $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$ et le $DL_3(0)$ de $\ln(1-x)$) d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x} = 1\,(= F'(0) = f(0))$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-x}{x^2} = 0$ car $\dfrac{F(x)-x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{3}$.

2. Soit $I =]0,1[$. Comme $\ln$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur I, y est solution de l'équation homogène (H) ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ y(x) = ke^{-\ln(x)} = \frac{k}{x}.$$

On recherche les solutions de (E) sur I en utilisant la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire en posant : $y(x) = \dfrac{k(x)}{x}$, $x \in I$.
La fonction k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (car $k(x) = xy(x)$) et on vérifie que y est solution de (E) sur I ssi $\forall x \in I$, $k'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Donc y est solution de (E) sur I ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $y(x) = \dfrac{F(x)+k}{x} = \dfrac{F(x)}{x} + \dfrac{k}{x}$.
Les solutions sur $]-1,0[$ de l'équation homogène ont la même forme que les solutions de l'équation homogène sur $]0,1[$: $x \mapsto \ln(-x)$ étant une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]-1,0[$, y est solution de l'équation homogène (H) sur $]-1,0[$ ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ y(x) = ce^{-\ln(-x)} = \frac{c}{-x} = \frac{-c}{x}$$

i.e. ssi il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in I$, $y(x) = \frac{k}{x}$ (en posant $k = -c$). Et la méthode de la variation de la constante montre que les solutions de (E) sur $]-1,0[$ ont la même forme que les solutions de (E) sur $]0,1[$.

3. Soit u une solution de (E) sur $]-1,1[$, i.e. une fonction dérivable sur $]-1,1[$ telle que $\forall x \in]-1,1[$, $xu'(x) + u(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(*)$. Comme u est solution de (E) sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$, d'après 2. il existe $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in]-1,0[$, $u(x) = \dfrac{F(x)}{x} + \dfrac{c}{x}$ et $\forall x \in]0,1[$, $u(x) = \dfrac{F(x)}{x} + \dfrac{d}{x}$.
Comme u est dérivable en 0, u est continue en 0 i.e. $u(0) = \lim\limits_{x\to 0} u(x) \in \mathbb{R}$ d'où $c = d = 0$ (Par exemple si $d > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{F(x)}{x} = 1$ d'après 1. et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{d}{x} = +\infty$). Donc si u est solution de (E) sur $]-1,1[$, alors $\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $u(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ et $u(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x} = 1$. De plus cette fonction u est dérivable en 0 avec $u'(0) = 0$ d'après 1. car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{u(x)-u(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)-x}{x^2} = 0$, et enfin u vérifie $(*)$ pour $x = 0$ car $0 \cdot u'(0) + u(0) = 1$. En conclusion, cette fonction u, dérivable sur $]-1,1[$, solution de (E) sur $]-1,0[$, sur $]0,1[$ et en $x = 0$, est bien l'unique solution recherchée de (E) sur $]-1,1[$.

Exercice 2. [TD7-A.6] Soit la suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}\,a_{n-1}$.

1. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

2. Etudier la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$.

4. On pose pour tout $x \in]-R,R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

4. a. Vérifier que pour tout $x \in]-R,R[$, $(1-x)f'(x) = (2x+1)f(x)$.

4. b. En déduire $f(x)$.

5. En déduire une expression de a_n en fonction de n (sous la forme d'une somme).

Indications et/ou solutions. **1.** La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels (strictement) positifs (récurrence). On en déduit qu'elle est croissante car $a_0 = a_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = \frac{2}{n+1}\,a_{n-1} > 0$. En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq a_1 = 1$. Puis on vérifie par récurrence (forte) que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq n^2$ en montrant par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $a_k \leq k^2$ » est vraie.
2. La suite croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} - a_n \geq \frac{2}{n+1}$. En déduire que la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ diverge et conclure en utilisant le lien suite-série.
3. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$ et $c_n = n^2$. Le rayon R_b de la série entière (géométrique) $\sum x^n$ est clairement égal à 1 et on vérifie classiquement en utilisant le critère de D'Alembert que le rayon de convergence R_c de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ est égal 1. Et, par une propriété du cours sur le rayon de convergence, on a : $R \leq R_b$ et $R_c \leq R$. D'où $R = 1$.

4. a. Par théorème, f est dérivable terme à terme sur $I =]-R, R[=]-1,1[$. Soit $x \in]-1,1[$. On a donc :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} = (n+1)a_n + 2a_{n-1}$ d'où :

$$f'(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} [(n+1)a_n + 2a_{n-1}]x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

ou encore $f'(x) = 1 + xf'(x) + f(x) - 1 + 2xf(x)$, c'est-à-dire $(1-x)f'(x) = (2x+1)f(x)$.

4. b. y est solution de l'équation différentielle (homogène) : $(1-x)y'(x) - (2x+1)y(x) = 0$ sur $I =]-1,1[$ ssi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $y(x) = c\dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ (remarquer que $\frac{2x+1}{1-x} = \frac{2x-2+3}{1-x} = -2 + \frac{3}{1-x}$). Or $f(0) = a_0 = 1$ donc $\forall x \in I$, $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-2x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} x^n$ et, en dérivant deux fois terme à terme le DSE(0) de $\frac{1}{1-x}$, on vérifie que si $|x| < 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)x^n.$$

Soit $x \in]-1,1[$. Le développement en série entière de f est le produit de Cauchy de ces deux séries (absolument convergentes). D'où

$$a_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^k}{k!} \cdot (n-k+2)(n-k+1).$$

Exercice 3. 1. [TD7-B.9] Résoudre sur $\mathbb{R}$: (E) $y'' + y' - 2y = xe^{-2x}$.

2. Résoudre sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: (E) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\cos^2 x}$.

Indications. **1.** La solution générale de (EH) est : $x \mapsto ae^{-2x} + be^x$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On pose : $y(x) = z(x)e^{-2x}$: z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi z est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})$: $z''(x) - 3z'(x) = x$. On cherche une fonction affine solution de : $u' - 3u = x$. On trouve $x \mapsto -\frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$. Finalement, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (-\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{9})e^{-2x} + ae^{-2x} + be^x$.

2. Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On pose : $y(x) = z(x)e^x$, $x \in I$, et on constate que y est solution de (E) sur I ssi z est solution sur I de $(\mathcal{E})$:

$$z''(x) = \frac{1}{\cos^2 x} (= \tan'(x)).$$

Finalement, y est solution de (E) sur I ssi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I$, $y(x) = -e^x \ln(\cos x) + (ax+b)e^x$.

Exercice 4. [TD6-28] 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E) : $y'' + y' + y = e^x$.

2. On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, $x \in \mathbb{R}$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier que f est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. En déduire $f(x)$.

Solution. **1.** *i*) Les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique de l'équation homogène (H) associée à (E) sont $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{j}$. Donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de (H) (à valeurs réelles) sont les fonctions :

$$x \mapsto ae^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + be^{-\frac{x}{2}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) = e^{-\frac{x}{2}}(a\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + b\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)),$$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

ii) On remarque que $x \mapsto \frac{1}{3}e^x$ est une solution évidente de (E).

iii) Finalement, en utilisant le principe de superposition, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{x}{2}}(a\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + b\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)).$$

2. *i*) On vérifie que le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ est égal à $+\infty$ en utilisant le critère de D'Alembert et on en déduit que f est indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-R, R[= \mathbb{R}$.

ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f''(x)+f'(x)+f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{3p+1}}{(3p+1)!}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{3p+2}}{(3p+2)!}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{x^{3p}}{(3p)!}\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}(\frac{x^{3p}}{(3p)!}+\frac{x^{3p+1}}{(3p+1)!}+\frac{x^{3p+2}}{(3p+2)!})\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{p=0}^{N}(\frac{x^{3p}}{(3p)!}+\frac{x^{3p+1}}{(3p+1)!}+\frac{x^{3p+2}}{(3p+2)!})\\
&= \lim_{N\to+\infty}(\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!})+(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!})+\cdots+(\frac{x^{3N}}{(3N)!}+\frac{x^{3N+1}}{(3N+1)!}+\frac{x^{3N+2}}{(3N+2)!})\\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{3N+2}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x.
\end{aligned}$$

iii) D'après 1. il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{3}e^x+e^{-\frac{x}{2}}(a\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+b\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$.
Comme $f(0)=1$, $1=\frac{1}{3}+a$ d'où $a=\frac{2}{3}$. De plus $f'(0)=0$. Or

$$f'(x)=\frac{1}{3}e^x-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(a\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+b\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x))+\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{x}{2}}(-a\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+b\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x))$$

donc $0=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{\sqrt{3}}{2}b$, c'est-à-dire $b=0$. En conclusion, $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{3}e^x+\dfrac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle d'inconnue $y\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$: $(E)\ :\ y''(x)+6y'(x)+9y(x)=\dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$ en utilisant la méthode de Lagrange.

Indications. On remarque que $y_0 : x\mapsto e^{-3x}$ est une solution de l'équation homogène associée qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On pose alors (méthode de Lagrange) $y(x)=y_0(x)z(x)$, $x\in\mathbb{R}$. La fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car z est le produit des deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$: y_0 et $x\mapsto e^{3x}$. On vérifie que y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall x\in\mathbb{R},\ z''(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
En « primitivant par parties », on obtient qu'une primitive de $x\mapsto \arctan x = 1.\arctan x$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction

$$x\mapsto x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Finalement, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ ssi $\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ y(x)=(x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2))e^{-3x}+(ax+b)e^{-3x}$.

Exercice 6. Soit (E) l'équation différentielle : $x^2y''(x)-2xy'(x)+2y(x)=x+1$
Soit $I=]0,+\infty[$. On associe à chaque application $y\in\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ l'application z définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall t\in\mathbb{R},\ z(t)=y(e^t)$.
1. Prouver que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{E})\ :\ z''(t)-3z'(t)+2z(t)=e^t+1$.
2. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}$ puis déterminer les solutions sur I de (E).

Solution.
1. La fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ comme composée des deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$: y et exp. Et on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$z'(t)=e^ty'(e^t)\ \text{ et }\ z''(t)=e^ty'(e^t)+(e^t)^2y''(e^t).$$

Soit $y\in\mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$. La fonction y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si :

$$\forall x>0,\ x^2y''(x)-2xy'(x)+2y(x)=x+1,$$

ou, comme $t\mapsto e^t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$, ssi :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \underbrace{(e^t)^2y''(e^t)}_{=z''(t)-z'(t)}-2\underbrace{e^ty'(e^t)}_{=z'(t)}+2\underbrace{y(e^t)}_{=z(t)}=e^t+1.$$

Ainisi y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$(\mathcal{E})\ :\qquad z''(t)-3z'(t)+2z(t)=e^t+1.$$

2. L'équation caractéristique de l'équation homogène $(\mathcal{H})$ associée à $(\mathcal{E})$ est : $r^2-3r+2=0$, i.e. $(r-1)(r-2)=0$.
Les deux racines réelles de cette équation caractéristique sont 1 et 2. D'après le cours, $z\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est solution de $(\mathcal{H})$ ssi

$$\exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ \text{ tel que }\forall t\in\mathbb{R},\ z(t)=ae^{2t}+be^t.$$

Une solution particulière de $(\mathcal{E})$ s'obtient en faisant la somme d'une solution particulière z_1 de $(\mathcal{E}_1)$: $z''(t)-3z'(t)+2z(t)=e^t$ et d'une solution particulière z_2 de $(\mathcal{E}_2)$: $z''(t)-3z'(t)+2z(t)=1$.
Recherche de z_1. Posons : $\forall t\in\mathbb{R},\ z_1(t)=u(t)\,e^t$. Comme $u(t)=e^{-t}z_1(t)$, u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Et on a :

$$z_1'(t)=(u'(t)+u(t))\,e^t,\ z_1''(t)=(u''(t)+2u'(t)+u(t))\,e^t.$$

Donc z_1 est solution de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}$, $u''(t) - u'(t) = 1$. Or une solution évidente de cette dernière équation est la fonction $t \mapsto -t$, donc $z_1 : t \mapsto -te^t$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.

Recherche de z_2. On constate que $z_2 : t \mapsto \frac{1}{2}$ est une solution (évidente) de $(\mathcal{E}_2)$.

En conclusion, $z \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution de $(\mathcal{E})$ ssi $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = z_1(t) + z_2(t) + ae^{2t} + be^t = -te^t + \frac{1}{2} + ae^{2t} + be^t$ et enfin y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x > 0$, $y(x) = z(\ln x) = -x\ln(x) + \frac{1}{2} + ax^2 + bx$.

Exercice 7. [Solutions DSE(0) d'une équation différentielle] Soit (E) l'équation différentielle, d'inconnue y : $x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x)$. Montrer que (E) admet une seule solution DSE(0) sur $]-1, 1[$ et l'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

Solution. 1) Soit f une solution DSE(0) sur $]-1, 1[$. Posons : $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On sait d'après le cours sur les séries entières que f est indéfiniment dérivable terme à terme sur $]-1, 1[$. On a donc en particulier :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\ f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Rappelons que $\forall x \in]-1, 1[$, $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. Donc f est solution de (E) sur $]-1, 1[$ ssi :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

ou encore ssi :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[n(n-1) + 4n + 2]}_{=(n+1)(n+2)} a_n x^n + 2a_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

d'où, par unicité du DSE(0) de $\ln(1 + x)$, ssi :

$$a_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}.$$

On vérifie avec la règle de D'Alembert que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)} x^n$ a bien pour rayon de convergence 1 et d'après ce qui précède, sa somme f est (l'unique) solution de (E) sur $]-1, 1[$.

2) *Expression de $f(x)$ si $x \in]-1, 1[$.* On vérifie tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}$.

On en déduit que si $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2} x^n \\
&= \frac{1}{2}\ln(1 + x) - \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} x^{n+1} + \frac{1}{2x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+2} x^{n+2} \\
&= \frac{1}{2}\ln(1 + x) + \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \frac{1}{2x^2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\
&= \frac{1}{2}\ln(1 + x) + \frac{1}{x}(\ln(1 + x) - x) + \frac{1}{2x^2}(\ln(1 + x) - (x - \frac{x^2}{2})) \\
&= \frac{1}{2}\ln(1 + x) + (x + \frac{1}{2})\frac{\ln(1 + x) - x}{x^2} + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

et $f(0) = a_0 = 0$. *Remarque.* f est bien continue en 0 car $\lim_{x \to 0} [\frac{1}{2}\ln(1 + x) + (x + \frac{1}{2})\frac{\ln(1 + x) - x}{x^2} + \frac{1}{4}] = 0$.

Exercice 8. **[TD7-C.17]** Soit (E) l'équation différentielle, d'inconnue y : $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$.

1. Déterminer les solutions DSE(0) de (E).

2. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$ en utilisant la méthode de Lagrange.

Solution.

1. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0, +\infty]$ (pour l'instant inconnu !). Posons : $\forall x \in]-R, R[$, $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Par propriété des séries entières, cette fonction y est *indéfiniment dérivable terme à terme* sur $]-R, R[$. En particulier

$$\forall x \in]-R, R[,\ y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Donc y est solution de (E) sur $]-R, R[$ ssi :

$$\forall x \in]-R, R[,\ \sum_{n=\cancel{2}1}^{+\infty} 4n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

ssi, en regroupant les deux premières sommes :

$$\forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[4n(n-1)+2n]}_{=(2n)(2n-1)} a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

ou encore, après avoir effectué dans le première somme ci-dessus le changement d'indice $p = n-1$, remplacé p par n, et regroupé les deux sommes en une seule, ssi :

$$\forall x \in]-R,R[,\ \sum_{n=0}^{+\infty} [(2n+2)(2n+1)a_{n+1} - a_n]x^n = 0.$$

d'où, *par unicité du DSE(0) sur* $]-R,R[$ *de la fonction nulle*, ssi $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$, c'est-à-dire ssi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = a_0 \cdot \frac{1}{(2n)!}.$$

La règle de D'Alembert permet de prouver que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(2n)!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.

Le raisonnement *par équivalences* précédent permet de conclure que (E) admet des solutions *sur* $\mathbb{R}$, DSE(0) sur $\mathbb{R}$, à savoir les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!},\ a_0 \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$. L'ensemble des solutions DSE(0) sur $\mathbb{R}$ de (E), formé des fonctions proportionnelles (colinéaires) à f, est donc la droite vectorielle (de dimension 1) dirigée par f, notée $\mathrm{Vect}(f)$.

2. On remarque tout d'abord que pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{ch}(\sqrt{x})$. Donc la fonction $y_0 : x \mapsto \mathrm{ch}(\sqrt{x})$ est d'après 1. une solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation *homogène* (E), ne s'annulant pas sur $]0,+\infty[$. Utilisons alors la méthode de la variation d'une constante (de Lagrange) avec y_0. Recherchons les solutions y de (E) sur $]0,+\infty[$ en posant : $y(x) = y_0(x)z(x)$, $x > 0$. Comme $z(x) = \dfrac{y(x)}{\mathrm{ch}(\sqrt{x})}$, z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et on obtient (après simplifications) que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ ssi :

$$\forall x > 0,\ z''(x) + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{th}(\sqrt{x}) + \frac{1}{2x}\right)z'(x) = 0.$$

Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$ et qu'une primitive de th sur $\mathbb{R}$ est ln(ch).
Comme $x \mapsto 2\ln(\mathrm{ch}(\sqrt{x}))$ est une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{th}(\sqrt{x})$, on obtient que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ ssi :

$$\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ z'(x) = \frac{c}{\sqrt{x}\,\mathrm{ch}^2(\sqrt{x})}$$

ou encore ssi :

$$\exists (c,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ z(x) = 2c\mathrm{th}(\sqrt{x}) + b$$

ou plus simplement en posant $a = 2c$ ssi :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ z(x) = a\mathrm{th}(\sqrt{x}) + b.$$

En conclusion, y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ ssi

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x > 0,\ y(x)\ (= z(x)\mathrm{ch}(\sqrt{x}))\ = a\mathrm{sh}(\sqrt{x}) + b\mathrm{ch}(\sqrt{x}).$$