Exercice `[Exemple 7 du cours équations différentielles d'ordre 2].` Résoudre sur $I =]-1, +\infty[$

$$(E)\ :\ (1+x)y'' - y' - xy = e^{-x}$$

en remarquant que $x \mapsto e^x$ est une solution de l'équation homogène associée (E_0).

Solution. Utilisons la méthode de la variation d'une constante (ou de Lagrange).

Soit $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$. Posons pour tout $x \in I$, $\boxed{y(x) = z(x)e^x}$.

L'application $z\ :\ x \mapsto y(x)e^{-x} \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ et on vérifie que y est solution de (E) sur I ssi

$$\forall x \in I,\ (1+x)z''(x) + (2x+1)z'(x) = e^{-2x}.$$

Posons $\boxed{u = z'}$ et notons $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle : $(1+x)u'(x) + (2x+1)u(x) = e^{-2x}$.

En remarquant que $\dfrac{2x+1}{1+x} = 2 - \dfrac{1}{1+x}$, on obtient que la solution générale u_H de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$ est de la forme :

$$x \mapsto u_H(x) = ce^{-(2x-\ln(1+x))} = c(x+1)e^{-2x},\ c \in \mathbb{R}.$$

On utilise ensuite la méthode de la variation de la constante pour déterminer toutes les solutions u de $\mathcal{E}$.

A cet effet, posons :

$$u(x) = c(x)(x+1)e^{-2x}$$

où $c \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Un calcul de dérivées montre que u est solution de $\mathcal{E}$ sur I ssi $\forall x \in I,\ c'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$,

donc ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I,\ c(x) = -\frac{1}{x+1} + k.$$

Ainsi $u(= z')$ est solution de $(\mathcal{E})$ sur I ssi il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \big(-\frac{1}{x+1} + k\big)(x+1)e^{-2x} \\ &= -e^{-2x} + k(x+1)e^{-2x} \end{aligned}$$

En résumé, les solutions y de (E) sur I sont les fonctions de la forme $x \mapsto z(x)e^x$ avec $z'(x) = -e^{-2x} + k(x+1)e^{-2x}$ $(*)$.

Il reste à expliciter $z(x)$, c'est-à-dire à déterminer (toutes) les primitives sur I de la fonction $x \mapsto -e^{-2x} + k(x+1)e^{-2x}$.

Soit P *une* primitive sur I de $x \mapsto (x+1)e^{-2x}$ (calculée ci-dessous). D'après $(*)$ il existe $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in I,\ z(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + kP(x) + l$$

et y est donc solution de (E) sur I ssi il existe $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I,\ y(x) = z(x)e^x = \frac{1}{2}e^{-x} + kP(x)e^{-x} + le^x$.

Déterminons maintenant une primitive P de $x \mapsto (x+1)e^{-2x}$. Soit $I(x) = \int_0^x (t+1)e^{-2t}\,dt$. En intégrant par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I(x) &= [-\frac{1}{2}(t+1)e^{-2t}]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{-2t}\,dt = [-\frac{1}{2}(t+1)e^{-2t}]_0^x - \frac{1}{4}[e^{-2t}]_0^x \\ &= -\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-x} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Comme $x \mapsto I(x)$ est l'unique primitive de $x \mapsto (x+1)e^{-2x}$ s'annulant en 0, le calcul précédent montre que

$$x \mapsto P(x) = -\frac{1}{4}(2x+3)e^{-2x}$$

est une primitive de $x \mapsto (x+1)e^{-2x}$ car $P'(x) = I'(x) = (x+1)e^{-2x}$.

Rappel : les primitives d'une fonction continues sur un intervalle sont définies à une constante addives près. Inutile donc de conserver la constante $\frac{3}{4}$ de la primitive $I(x)$.

Par conséquent, y est solution de (E) sur I si et seulement si il existe $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in I,\ y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{k}{4}(2x+3)e^{-x} + le^x.$$

En conclusion, y est solution sur I de (E) ssi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in I$, $\boxed{y(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \underbrace{\alpha(2x+3)e^{-x} + \beta e^x}_{solutions\ de\ (E_0)}}$

en posant $\alpha = -\frac{k}{4}$ et... $\beta = l$.