Feuille d'exercices n° 9 : solutions et/ou indications.

Exercice 1. 3. et 6. Existence de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan x)\, dx$.

Indications.
Existence de I. Posons pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \sqrt{\tan x}$. Cette fonction f est continue positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et :

$$f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{1}{(\frac{\pi}{2} - x)^{\frac{1}{2}}}$$

car

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x} \text{ car } \sin t \underset{t\to 0}{\sim} t.$$

Donc I converge par la règle de l'équivalent positif car $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(\frac{\pi}{2} - x)^{\frac{1}{2}}}$ converge (« Riemann en $\frac{\pi}{2}$ avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$»).

Existence de J. Posons pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = \ln(\tan x)$: g est bien définie et continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
L'intégrale J existe ssi $J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)\, dx$ existe (« problème en 0») et $J_2 = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} g(x)\, dx$ (« problème en $\frac{\pi}{2}$») existe.

Existence de J_1 : on *justifie* que $g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$ et on en déduit par la règle de l'équivalent (négatif ici) que J_1 converge.

Existence de J_2 : on *justifie* que $g(x) = \ln(\sin x) - \ln(\cos x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} -\ln(\cos x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} -\ln(\frac{\pi}{2} - x)$ et on en déduit par la règle de l'équivalent (positif ici) que J_1 converge car $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{\pi}{2} - x)\, dx$ converge (à préciser). Donc J converge.

Exercice 1. 8. Nature de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1 - \sqrt{x}}$.

Indications. Posons pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{x}}$: f est continue sur $[0, 1[$, à valeurs strictement positives.
Justifier que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{2}{1-x}$. En déduire que I diverge.

Exercice 1. 18. Nature de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{-(\ln t)^2}\, dt$ et $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-(\ln t)^2}\, dt$.

Indications. Posons pour tout $t \in]0, +\infty[$, $f(t) = e^{-(\ln t)^2}$. Cette fonction f est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$.

- *Existence de I_1* : I_1 existe car f est prolongeable par continuité (à droite) en 0 en posant $f(0) = 0$ car, par composition de limites, $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$.
- *Existence de I_2* : I_2 existe par le critère de Riemann en $+\infty$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$. En effet,

$$\lim_{t\to+\infty} \ln(t^2 f(t)) = \lim_{t\to+\infty} 2\ln(t) - (\ln(t))^2 = \lim_{t\to+\infty} \ln(t)(2 - \ln(t)) = -\infty$$

Remarque : L'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(\ln t)^2}\, dt$ converge et est égale à $I_1 + I_2$.

Exercice 2. 3. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{t} - t^2)^\alpha}\, dt$ converge.

Indications. Posons pour tout $t \in]0, 1[$, $f(t) = \dfrac{1}{(\sqrt{t} - t^2)^\alpha}$. Cette fonction f est continue sur $]0, 1[$, à valeurs dans $]0, +\infty[$, et :

$$f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \text{ et } f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (\frac{2}{3})^\alpha \frac{1}{(1-t)^\alpha}$$

car d'une part $\sqrt{t} - t^2 \underset{t\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}$ et d'autre part $\sqrt{t} - t^2 \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{3}{2}(1 - t)$: en effet, si $h = 1 - t$,

$$\sqrt{t} - t^2 = \sqrt{1-h} - (1-h)^2 = (1 - \frac{h}{2} + o_0(h)) - (1 - 2h + o_0(h)) = \frac{3}{2}h + o_0(h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{3}{2}h.$$

Donc (à détailler) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(\sqrt{t} - t^2)^\alpha}\, dt$ converge ssi $\alpha < 2$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{(\sqrt{t} - t^2)^\alpha}\, dt$ converge ssi $\alpha < 1$.
Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(\sqrt{t} - t^2)^\alpha}\, dt$ converge ssi $\alpha < 1$.

Exercice 2. 7. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}\,dx$ converge.

Indications. Posons pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1-x)^\alpha}$: f est continue négative sur $]0,1[$ et

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x \text{ et } f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}} \text{ car } \ln x \underset{x\to 1}{\sim} x-1.$$

Donc, par la règle de l'équivalent de signe constant, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ converge et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$ converge ssi $\alpha - 1 < 1$ (à détailler).

Conclusion : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x)^\alpha}\,dx$ converge ssi $\alpha < 2$.

Exercice 3. 1. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

Existence de I. Posons pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x}}$: f est continue négative sur $]0,1[$ et on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x) \text{ et } f(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\sqrt{1-x} \text{ car } \ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1.$$

Donc $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$ converge par la règle de l'équivalent (négatif) car $\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(x)\,dx$ converge et $I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$ converge car f est prolongeable par continuité en 1 : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} -\sqrt{1-x} = 0$. Donc I existe.

Calcul de I. Effectuons le changement de variable : $t = \sqrt{1-x}$ dans $I_{a,b} = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ avec $0 < a < b < 1$.
En posant $\beta = \sqrt{1-b}$ et $\alpha = \sqrt{1-a}$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{a,b} &= 2\int_\beta^\alpha \ln(1-t^2)\,dt \\ &= 2\Big(\int_\beta^\alpha \ln(1-t)\,dt + \int_\beta^\alpha \ln(1+t)\,dt\Big) \\ &= 2\Big(\int_{1-\alpha}^{1-\beta} \ln(s)\,ds + \int_{1+\beta}^{1+\alpha} \ln(s)\,ds\Big) \end{aligned}$$

après changement de variable $s = 1-t$ (resp. $s = 1+t$) dans la première (resp. la seconde) intégrale.

Donc $I = \lim\limits_{a\to 0^+,\, b\to 1^-} I_{a,b} = \lim\limits_{\alpha\to 1^-,\, \beta\to 0^+} 2\Big(\displaystyle\int_{1-\alpha}^{1-\beta} \ln(s)\,ds + \int_{1+\beta}^{1+\alpha} \ln(s)\,ds\Big) = 2\int_0^2 \ln(s)\,ds$.

Finalement, $I = 2\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \displaystyle\int_\varepsilon^2 \ln(s)\,ds = 2\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} [s\ln(s) - s]_\varepsilon^2 = \boxed{2(2\ln 2 - 2)}$ car $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\ln(\varepsilon) = 0$.

Exercice 3. 4. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

Indications. i) Existence de I. Posons pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$: f est continue sur $]0,+\infty[$ et I existe car

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

ii). Calcul de I. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$ tel que $a < b$. Effectuer un changement de variable (pas très compliqué à deviner !) dans $\displaystyle\int_a^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.
On obtient finalement $I = 2$.

Exercice 3. 7. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Indications. i) Existence de I. Posons pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$: f est continue sur $[0,+\infty[$ et I existe car $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^4}$.
ii). Calcul de I. Considérons, pour tout $X > 0$, $I(X) = \int_0^X f(x)\,dx$. En intégrant par parties $J(X) = \int_0^X 1 \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx$, on obtient

$$J(X) = \frac{X}{1+X^2} + 2(J(X) - I(X)),$$

c'est-à-dire $I(X) = \frac{1}{2}(\frac{X}{1+X^2} + J(X)) = \frac{1}{2}(\frac{X}{1+X^2} + \arctan(X))$. Finalement $I = \lim\limits_{X\to+\infty} I(X) = \dfrac{\pi}{4}$.

Généralisation. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.

Exercice 3. 11. Soit $\alpha > 0$. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+(\tan x)^\alpha}$.

Indications. Posons pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \dfrac{1}{1+(\tan x)^{\alpha}}$. I existe car f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$ car $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$. En outre, le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ conduit à :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan t)^{\alpha}}{1+(\tan t)^{\alpha}}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tan x)^{\alpha}}{1+(\tan x)^{\alpha}}\, dx \, (= J)$$

d'où $2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$ et finalement $I = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 6. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$.
Indications : pour le calcul de I, on pourra commencer par effectuer le changement de variable $x = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$.

Réponse : a) <u>Existence de I</u>. Posons pour tout $x \in]a,b[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$: f est une fonction continue de $]a,b[$ dans $]0,+\infty[$.

Soit $c \in]a,b[$. I existe ssi $I_1 = \displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ existent.

Existence de I_1. On a : $f(x) \underset{x\to a^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{b-a}}\frac{1}{\sqrt{x-a}}$ et $\displaystyle\int_a^c \frac{dx}{\sqrt{x-a}}$ converge (« Riemann en a avec «$\alpha = \frac{1}{2} < 1$ »). On conclut avec la règle de l'équivalent positif.

Existence de I_2. Même raisonnement que pour l'existence de I_1. On a : $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} \frac{1}{\sqrt{b-a}}\frac{1}{\sqrt{b-x}}$ et $\displaystyle\int_c^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$ converge (« Riemann en b avec «$\alpha = \frac{1}{2} < 1$ »). On conclut avec la règle de l'équivalent positif.

b) <u>Calcul de I</u>. Le changement de variable proposé conduit à $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}$ (donc cette intégrale ne dépend pas de (a,b)). En utilisant l'égalité $t(1-t) = -(t^2-t) = -((t-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} - (t-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}(1-(2t-1)^2)$, on a $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}$ et par changement de variable $u = 2t-1$: $I = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi$ (à détailler).

Exercice 7. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pose : $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$.

1. Montrer que $B(x,y)$ existe si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.
2. Calculer $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
3. Soient $x > 0$ et $y > 0$. Montrer que $B(x,y) = B(y,x)$ et que $B(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}B(x,y)$.

Indications : **1.** Posons pour tout $t \in]0,1[$, $f(t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1}$: f est une fonction continue de $]0,1[$ dans $]0,+\infty[$. Vérifier que $f(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et $f(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1} = \dfrac{1}{(1-t)^{1-y}}$. Utiliser « Riemann en 0 et en 1 » et la règle de l'équivalent positif.
2. $B(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$ (Voir l'exercice précédent).
3. *i)* Pour obtenir l'égalité $B(x,y) = B(y,x)$, effectuer le changement de variable $s = 1-t$ dans $B(x,y)$.
ii) Plus compliqué. Une ipp (à détailler) donne :

$$B(x+1,y) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,dt.$$

Or $(1-t)^y = (1-t)(1-t)^{y-1} = (1-t)^{y-1} - t(1-t)^{y-1}$ d'où

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}\left(\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt - \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,dt\right) = \frac{x}{y}(B(x,y) - B(x+1,y))$$

d'où l'égalité cherchée.

Exercice 12. 1. Prouver l'existence de l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Indications : i) Existence de $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$, continue sur $]0,1]$, est prolongeable par continuité (à droite) en 0 en posant $f(0) = 0$ car $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}$.
ii) Existence de $I_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.
Posons, pour $X \geq 1$, $I(X) = \displaystyle\int_1^X \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$. En intégrant par parties : $I(X) = \left[-\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}\right]_1^X + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^X \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ converge *absolument* par comparaison car pour tout $x \geq 1$, $|\dfrac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}| \leq \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ converge (Riemann en $+\infty$ avec

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$). Donc, par théorème, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ converge.

De plus, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{\sqrt{X}} = 0$ car $\displaystyle\frac{|\cos X|}{\sqrt{X}} \leq \frac{1}{\sqrt{X}}$ et $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{X}} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \big[-\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \big]_1^X = \lim_{X\to+\infty} (-\frac{\cos X}{\sqrt{X}} + \cos 1) = \cos 1$. On obtient finalement que

$$I_2 = \lim_{X\to+\infty} I(X) = \cos 1 + \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx \in \mathbb{R}.$$

Donc I existe car I_1 et I_2 existent.

Exercice 22. Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, et $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\, dt$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que $\displaystyle u_{n+1} - u_n = \int_n^{n+1} (t-n) f'(t)\, dt$.
2. En déduire que si f' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) converge.

Indications. : 1. En utilisant la relation de Chasles : $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)\, dt$. Intégrer par parties $\int_n^{n+1} 1 \cdot f(t)\, dt$ en prenant (astucieusement) $t \mapsto t - n$ comme primitive de $t \mapsto 1$. On pouvait aussi intégrer par parties $\int_n^{n+1} (t-n) f'(t)\, dt$ et retrouver $u_{n+1} - u_n$.
2. D'après 1. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \int_n^{n+1} (t-n)|f'(t)|\, dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\, dt \;(*)$$

car $\forall t \in [n, n+1]$, $0 \leq t - n \leq 1$.

Comme f' est intégrable sur $[0, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ existe. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_n^{n+1} |f'(t)|\, dt$ converge et a pour somme $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f'(t)|\, dt$: en effet par définition de la convergence d'une série et la relation de Chasles, on a effectivement

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} |f'(t)|\, dt = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{N+1} |f'(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} |f'(t)|\, dt.$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge donc absolument par comparaison grâce à $(*)$, et donc converge.
On peut conclure, par le lien suite-série, que la suite (u_n) converge.