Limite et continuité de fonctions vectorielles.

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|\cdot|$ la valeur absolue ou le module.

1 Limite en un point

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux evn (souvent de dimension finie), A une partie non vide de E et f une application de A dans F. Soit $a \in E$, *adhérent* à A, ce qui signifie que toute boule ouverte centrée en a contient au moins un élément de A ou encore qu'il existe une suite de vecteurs de A qui converge vers a (caractérisation séquentielle d'un point adhérent).

1.1 Définition et remarques

Définition 1 *On dit que f admet pour limite $\ell \in F$ en a ou encore que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque $x \in A$ tend vers a si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Si c'est le cas, on écrira alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Remarque 1 *Si E et F sont de dimension finie, des normes quelconques sur E (resp. sur F) sont équivalentes, et on en déduit facilement que la notion de limite est indépendante de la norme choisie sur E (resp. sur F) dans la définition 1.*

Remarque 2 *La définition 1 généralise évidemment la définition de* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ *où f est une application de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Rappelons en effet que dans ce cas particulier très important, $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $x \in A$ tend vers a si et seulement si, par définition :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Quand E ou F est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme choisie sur E ou F est implicitement la valeur absolue ou le module.

1.2 Caractérisation séquentielle de la limite

La proposition suivante permet de transformer l'étude d'une limite d'une fonction en une étude de limite de suite :

Proposition 1 `[Caractérisation séquentielle de la limite]`. *On a :*
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ *si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

Preuve. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$. La définition 1 donne l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Soit (x_n) une suite (quelconque) d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\|x_n - a\|_E \leq \alpha$. On a alors $\forall n \geq N$, $\|f(x_n) - \ell\|_E \leq \varepsilon$. Par conséquent, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour toute suite (x_n) d'éléments A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, on ait $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.
Raisonnons par l'absurde en supposant donc que $f(x)$ ne tende pas vers ℓ lorsque $x \in A$ tend vers a.
Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\|x - a\|_E \leq \alpha$ et $\|f(x) - \ell\|_F > \varepsilon$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $\alpha = \frac{1}{n}$. D'après ce qui précède, il existe $x_n \in A$ tel que $\|x_n - a\|_E \leq \frac{1}{n}$ et $\|f(x_n) - \ell\|_F > \varepsilon$. On constate que la suite (x_n) est une suite de A qui tend vers a mais que la suite $(f(x_n)$ ne tend pas vers ℓ car si c'était le cas on aurait pour n assez grand, $\|f(x_n) - \ell\|_F \leq \varepsilon$. L'hypothèse de départ est contredite. □

Applications. 1. Etudier $\lim\limits_{x \to 0} \cos(\dfrac{1}{x})$ et $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que la fonction partie entière n'est pas continue en n.

1.3 Opérations sur les limites

Proposition 2 *Soit g une application de A dans F et ϕ une application de A dans $\mathbb{K}$.*
Si f, g et ϕ admettent une limite en a, alors $x \mapsto \|f(x)\|_F$, $f + g$ et ϕf admettent une limite en a et :

$$\lim_{x \to a} \|f(x)\|_F = \|\lim_{x \to a} f(x)\|_F,\ \lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x),\ \lim_{x \to a} (\phi f)(x) = \lim_{x \to a} \phi(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Preuve. Utiliser la proposition 1. □

Proposition 3 `[Composition de limites]`. *Soit $B \subset F$ tel que $f(A) \subset B$ et b un point adhérent à B. Soit $(G, \|\cdot\|_G)$ un evn de dimension finie et g une application de B dans F. Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ *et* $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c \in G$ *alors* $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = c$.

Preuve. Soit (x_n) une suite quelconque de A qui converge vers a. La suite $(f(x_n))$ de B converge vers b d'après la proposition 1 et la suite $((g \circ f)(x_n)) = (g(f(x_n)))$ de C converge vers c en réutilisant la proposition 1. Et on conclut à nouveau avec la proposition 1. □

1.4 Utilisation des fonctions coordonnées

Dans ce paragraphe on suppose F de dimension finie p. Etudier la limite d'une fonction à valeurs dans F revient alors à étudier la limite de p fonctions à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Plus précisement, soit $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de F. On définit les p *fonctions coordonnées* f_j de f relativement à la base $\mathcal{B}$ en posant : $\forall x \in A$, $f(x) = \sum_{j=1}^{p} f_j(x)\varepsilon_j$.

Proposition 4 *Soit* $\ell = \sum_{j=1}^{p} \ell_j \varepsilon_j \in F$. *On a :* $\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \cdots, p\}$, $\lim_{x\to a} f_j(x) = \ell_j$.

Preuve. Soit N la norme sur F définie pour tout $u = \sum_{j=1}^{p} u_j\varepsilon_j \in F$ par : $N(\sum_{j=1}^{p} u_j\varepsilon_j) = |u_1| + \cdots + |u_p|$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. On a donc $\lim_{x\to a} N(f(x) - \ell) = 0$. Or, pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$, on a

$$\forall x \in A,\ |f_j(x) - \ell_j| \leq N(f(x) - \ell),$$

donc $\lim_{x\to a} |f_j(x) - \ell_j| = 0$ par le théorème des gendarmes, c'est-à-dire $\lim_{x\to a} f_j(x) = \ell_j$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par addition des limites, on a $\lim_{x\to a} N(f(x) - \ell) = \lim_{x\to a} \sum_{j=1}^{p} |f_j(x) - \ell_j| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. □

2 Continuité

Remarque 3 *Soit $a \in A$. Le "point" a est évidemment adhérent à A car toute boule ouverte centrée en a contient au moins un élément de A, à savoir a lui-même. Supposons maintenant que f admette pour limite $\ell \in F$ en a. En utilisant la définition 1 avec $x = a$, on obtient que $\forall \varepsilon > 0$, $\|f(a) - \ell\|_F \leq \varepsilon$ et donc que $\ell = f(a)$. Ainsi, si f admet une limite en $a \in A$, cette limite ne peut être que $f(a)$, ce qui conduit à la définition suivante :*

Définition 2 *Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire ssi :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 3 *On dit que f est continue sur A si et seulement f est continue en tout $a \in A$.*
L'ensemble des fonctions continues de A dans F sera noté $\mathcal{C}(A, F)$ ou $\mathcal{C}^0(A, F)$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition 1 :

Proposition 5 `[Caractérisation séquentielle de la continuité]`. *Soit $a \in A$. L'application f est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Application. `[Une équation fonctionnelle]` Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(2t) = f(t)$.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(\frac{x}{2^n}) = f(x)$.
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Rappel. Soient f est une application de E dans F et B une partie de F. L'image réciproque de B par f, notée $f^{-1}(B)$, est définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\},$$

autrement dit, soit $x \in E$: $x \in f^{-1}(B)$ si et seulement si $f(x) \in B$.
On observera que cette définition ne suppose pas f bijective $\cdots$ bien que l'on utilise la notation f^{-1}.
On a alors la propriété suivante :

Proposition 6 `[Image réciproque d'un ouvert et d'un fermé par une application continue]`
Soit $f \in \mathcal{C}^0(E, F)$. Si B est une partie fermée (resp. ouverte) de F, alors $f^{-1}(B)$ est une partie fermée (resp.ouverte) de E.

Preuve. i) Soit B une partie fermée de F. Montrons que $A = f^{-1}(B)$ est une partie fermée de E en utilisant la caractérisation séquentielle d'un fermé : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de A, supposée convergente vers $\ell \in E$. Montrons que $\ell \in A$. Par définition de A, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \in B$. Comme $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(\ell)$ car f est continue en ℓ, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de vecteurs de B qui converge vers le vecteur $f(\ell)$. D'où $f(\ell) \in B$ car B est un fermé de F et finalement $\ell \in A$.
ii) Soit B un ouvert de F. Montrons que $A = f^{-1}(B)$ est une partie ouverte de E en vérifiant que $A' = E \setminus A = \{x \in E / x \notin A\}$ est une partie fermée de E : soit $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de A', supposée convergente vers $\ell' \in E$. Montrons que $\ell' \in A'$. Par définition de A', pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a'_n) \in B' = F \setminus B = \{y \in F / y \notin B\}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} f(a'_n) = f(\ell')$ car f est continue en ℓ', la suite $(f(a'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite de vecteurs de B' qui converge vers le vecteur $f(\ell')$. Or B' est une partie fermée de F donc $f(\ell') \in B'$, c'est-à-dire $\ell' \in A'$. □

Application. Soit $f \in \mathcal{C}^0(E, \mathbb{R})$. Alors $\{x \in E / f(x) > 0\}$ est un ouvert de E et $\{x \in E / f(x) \geq 0\}$ est un fermé de E.

2.1 Opérations sur les fonctions continues

Les propositions $2, 3$ et 4 entraînent immédiatemment le théorème suivant :

Théorème 1 `[Résultats généraux sur la continuité]`
a. Toute combinaison linéaire de fonctions continues de A dans F est continue, i.e. $\mathcal{C}^0(A,F)$ est un espace vectoriel.
b. Si $f \in \mathcal{C}^0(A,F)$ alors $x \mapsto \|f(x)\|_F \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{R}^+)$.
c. Soit $f \in \mathcal{C}^0(A,F)$ et $\phi \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{K})$. Alors $\phi f \in \mathcal{C}^0(A,F)$.
d. Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{K})$ telle que $\forall x \in A,\ \phi(x) \neq 0$. Alors $1/\phi \in \mathcal{C}^0(A,\mathbb{K})$.
e. Soient $B \subset F$ tel que $f(A) \subset B$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ un evn de dimension finie.
Si $f \in \mathcal{C}^0(A,F)$ et $g \in \mathcal{C}^0(B,G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(A,G)$.
f. Soit f une application de A dans F. f est continue sur A ssi les fonctions coordonnées de f relativement à une base quelconque de E sont continues.

Définition 4 *On dit qu'une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est polynomiale si c'est une combinaison linéaire d'applications du type $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ où $(d_1, \cdots, d_n) \in \mathbb{N}^n$*

Exemple. L'application $f:\ (x,y,z) \mapsto x^2y^3z^5$ est une application polynomiale de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 7 *Une application polynomiale de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

Exemples. 1. $f:\ (x,y,z) \mapsto x^2y^3z^5$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$. L'application $\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car elle est polynomiale en les n^2 coefficients de A.

2.2 Applications lipschitziennes

Définition 5 *Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est k-lipschitzienne[1] (ou lipschitzienne de rapport k) sur A si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\,\|x - y\|_E.$$

On dit que f est lipschitzienne sur A s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit k-lipschitzienne sur A.

Remarque 4 *Si E et F sont de dimension finie, la notion d'application lipschitzienne ne dépend pas du choix des normes sur E et sur F car deux normes d'un evn de dimension finie sont équivalentes. Par contre, la valeur de la constante k en dépend.*

Exemples.
1. Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$. L'application $p_j : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_j$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq k$ est k-lipschitzienne.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ (ou $]y,x[$) tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$. D'où $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| \leq k|x-y|$. En particulier, $\sin$ *et* $\cos$ *sont* 1*-lipschitziennes :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |\sin x - \sin y| \leq |x-y| \text{ et } |\cos x - \cos y| \leq |x-y|.$$

3. $\|\cdot\|_E$ est une application 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $\mathbb{R}^+$ *car pour tout $(x,y) \in E^2$,* $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$.
4*. `[Distance d'un vecteur à une partie de` E`]`. Soit A une partie non vide de $(E, \|\cdot\|)$.
a. Soit $x \in E$. Justifier l'existence de la borne inférieure de l'ensemble $\{\|x-a\| / a \in A\}$.
Cette borne inférieure, notée $d(x,A)$, s'appelle la "distance de x à A".
b. Soit $(x,y) \in E^2$. Vérifier que $\forall a \in A,\ d(x,A) \leq \|y-a\| + \|x-y\|$.
En déduire que $d(x,A) - \|x-y\| \leq d(y,A)$ et que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$.
Donc l'application : $x \mapsto d(x,A)$ est une application 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\mathbb{R}^+$.

Proposition 8 *Toute application lipschitzienne sur A est continue sur A.*

Preuve. Soient $k \in \mathbb{R}^+$ et f k-lipschitzienne sur A. Si $k = 0$, f est constante sur A et donc continue sur A. Supposons maintenant $k > 0$. Soit $a \in A$. Alors pour tout $x \in A$, $\|x-a\|_E \leq \dfrac{\varepsilon}{k} \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon$. Donc f est continue en a.
Autre méthode. Soit $a \in A$. Soit (x_n) une suite quelconque de A telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Comme pour tout n,

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F \leq k\,\|x_n - a\|_E \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \|x_n - a\|_E = 0,$$

on obtient par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$ et on conclut avec la proposition 5. □

Remarque 5 *La fonction racine carrée est continue sur $[0,1]$ mais n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$.*

Proposition 9 *L'ensemble des applications lipschitziennes de A dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(A,F)$.*

Preuve. Cet ensemble est non vide car il contient par exemple la fonction constante $\theta :\ x \mapsto 0_F$. Puis on vérifie facilement que si f (resp. g) est k (resp. k') - lipschitzienne sur A et $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha f + g$ est $|\alpha|k + k'$-lipschitzienne sur A. □

[1] Cette notion a été introduite par le mathématicien allemand Rudolph Lipschitz en 1876 dans un théorème sur les équations différentielles.

2.3 Continuité des applications linéaires

Dans ce paragraphe, $(E, \|\cdot\|_E)$ est un evn **de dimension finie** et $(F, \|\cdot\|_F)$ un evn quelconque.
Commençons par rappeler quelques définitions usuelles d'algèbre linéaire :

Définition 6 *a. Soit f une application de E dans F. On dit que f est linéaire ssi : $\forall (u,v) \in E^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$.*
b. Une application linéaire f de E dans E est appelée endomorphisme de E.
c. Une application linéaire f de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire sur E.

On note $\mathcal{L}(E,F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F (resp. des endomorphismes de E).

Proposition 10 *Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est lipschitzienne sur E et donc continue sur E.*

Preuve. Soit $n = \dim E$. Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et N la norme sur E définie pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ par :

$$N(x) = N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

Comme E est de dimension finie, N et $\|\cdot\|_E$ sont deux normes équivalentes sur E. Il existe donc $b > 0$ tel que $\forall x \in E$, $N(x) \leq b\,\|x\|_E$.
Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ un vecteur quelconque de E. Comme f est linéaire, on a, en posant $C = \max(\|f(e_1)\|_F, \cdots, \|f(e_n)\|_F)$:

$$\|f(x)\|_F = \|f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)\|_F = \|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,\|f(e_i)\|_F \leq CN(x) \leq Cb\|x\|_E.$$

Soit $y \in E$. En remplaçant dans l'inégalité précédente x par $x - y$, on obtient finalement grâce à la linéarité de f que

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq Cb\|x-y\|_E.$$

Donc f est une application Cb-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. □

Exemples. 1. Soit $f(x,y) = (2x+3y, 4x+5y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On montre facilement que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. D'après la proposition précédente, f est une application lipschitzienne de $\mathbb{R}^2$ muni d'une norme quelconque dans $\mathbb{R}^2$ également muni d'une norme quelconque. On peut montrer directement que f est 8-lipschitzienne de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ et 9- lipschitzienne de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ et que ces constantes 8 et 9 sont les plus petites possibles.
2. L'application trace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est linéaire donc lipschitzienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3 Fonction continue sur une partie fermée bornée à valeurs réelles

Conformément au programme, nous admettons le résultat suivant :

Théorème 2 *Soit A une partie partie fermée et bornée d'un espace vectoriel E de dimension finie et f une application continue de A dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée sur A et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $(c,d) \in A^2$ tel que $\forall x \in A$, $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$.*

Remarque : Une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel de dimension finie est dite compacte.
Exemple. Soit $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ et $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x + 2y$. Justifier que f est bornée sur $\mathcal{C}$ et atteint ses bornes en des couples de $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.

4 Rappels sur les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

On rappelle sans démonstration les résultats classiques suivants :

Théorème 3 `[des valeurs intermédiaires]` *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.*
Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $f(a)f(b) < 0$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = 0$.
Plus généralement, en supposant $f(a) < f(b)$, si $y \in]f(a), f(b)[$, il existe $x \in]a,b[$ tel que $y = f(x)$,
en d'autres termes, f prend (atteint) toute valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$.

Corollaire 1 `[L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle]`
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Alors $f(I) = \{f(x)/x \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 4 `[L'image d'un segment par une fonction continue est un segment]`
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que

$$\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Par conséquent, $f([a,b]) = \{f(x)/x \in [a,b]\} = [m, M]$ avec $m = f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = f(d) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.