Intégration sur un intervalle quelconque.

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|\cdot|$ la valeur absolue ou le module.

Dans le cours de PCSI, on étudie les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue (ou plus généralement continue par morceaux) sur un *segment*, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Dans ce chapitre, on généralise cette étude en définissant (quand elle existe) l'intégrale sur un intervalle I *quelconque* d'une fonction continue par morceaux sur I et la notion de fonction intégrable sur I.

On note $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{C}^0_m(I,\mathbb{K})$) l'ensemble (le $\mathbb{K}$- espace vectoriel) des fonctions continues (resp. continues par morceaux) sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1 Intégrales généralisées ou impropres.

1.1 Définitions.

Définition 1 *1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b[,\mathbb{K})$. On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge (existe, est définie, a un sens) ou encore que f admet une intégrale généralisée (impropre) sur $[a,b[$ si $\lim_{X\to b}\int_a^X f(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{K}$. Si c'est le cas, on note $\int_a^b f(x)\,dx$ cette limite. Sinon, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.*

2. Soient $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(]a,b],\mathbb{K})$. On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge (existe, est définie, a un sens) ou encore que f admet une intégrale généralisée (impropre) sur $]a,b]$ si $\lim_{X\to a}\int_X^b f(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{K}$. Si c'est le cas, on note $\int_a^b f(x)\,dx$ cette limite. Sinon, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Remarque 1 `[Relation de Chasles]` *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b[,\mathbb{K})$. Pour tout $c \in [a,b[$, les intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_c^b f(x)\,dx$ sont de même nature et si elles convergent,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

On a un résultat analogue pour $f \in \mathcal{C}^0_m(]a,b],\mathbb{K})$.

Preuve. D'après la relation de Chasles pour les fonctions continues par morceaux sur un segment, pour tout $X \in [c,b[$, $\int_a^X f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^X f(x)\,dx$. Si $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, alors

$$\lim_{X\to b}\int_c^X f(x)\,dx = \lim_{X\to b}\int_a^X f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx \in \mathbb{K}.$$

Autrement dit, $\int_c^b f(x)\,dx$ existe et $\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$.

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ n'existe pas, $\int_c^b f(x)\,dx$ n'existe pas également car si $\int_c^b f(x)\,dx$ existait, on aurait

$$\lim_{X\to b}\int_a^X f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \in \mathbb{K}$$

ce qui contredit la divergence supposée de $\int_a^b f(x)\,dx$. $\square$

Exercice 1. Etudier la nature des intégrales : $\int_0^{+\infty} C\ dx$, où $C \in \mathbb{C}$, $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$, $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$, $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$, $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Définition 2 `[Intégrale généralisée aux deux bornes]`.

Soient $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(]a,b[,\mathbb{K})$. On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si et seulement si il existe $c \in]a,b[$ tel que $\int_a^c f(x)\,dx$ **et** *$\int_c^b f(x)\,dx$ existent, cette propriété ne dépendant pas du réel c choisi dans $]a,b[$. Si c'est le cas, la valeur de la somme $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ne dépend pas de c et est, par définition, égale à $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Exercice 2. Calculer $\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^X x^3\,dx$. Nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3\,dx$?

1.2 Propriétés élémentaires.

Proposition 1 `[Fonctions à valeurs dans` $\mathbb{C}$`]`. *Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b[,\mathbb{C})$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tels que $a < b$. $\int_a^b f(x)\,dx$ converge si et seulement si $\int_a^b \mathrm{Re}\ f(x)\,dx$ et $\int_a^b \mathrm{Im}\ f(x)\,dx$ convergent et si c'est le cas*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}\ f(x)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}\ f(x)\,dx.$$

Même énoncé avec $f \in \mathcal{C}^0_m(]a,b],\mathbb{C})$, avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Preuve. Soit $X \in [a,b[$. Par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment, à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$\int_a^X f(x)\,dx = \int_a^X \mathrm{Re}\ f(x)\,dx + i\int_a^X \mathrm{Im}\ f(x)\,dx.$$

Donc $\lim\limits_{X\to b}\int_a^X f(x)\,dx \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim\limits_{X\to b}\int_a^X \mathrm{Re}\ f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{X\to b}\int_a^X \mathrm{Im}\ f(x)\,dx \in \mathbb{R}$ et si c'est le cas :

$$\lim_{X\to b}\int_a^X f(x)\,dx = \lim_{X\to b}\int_a^X \mathrm{Re}\ f(x)\,dx + i\lim_{X\to b}\int_a^X \mathrm{Im}\ f(x)\,dx$$

c'est-à-dire $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}\ f(x)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}\ f(x)\,dx$. □

Proposition 2 `[Prolongement par continuité]`. *Soient a et b deux* **réels** *tel que $a < b$.*

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(]a,b],\mathbb{K})$ tel que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \in \mathbb{K}$. Alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b[,\mathbb{K})$ tel que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{K}$. Alors $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Preuve. 1. Considérons la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[a,b]$ par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in]a,b]$ et $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Cette fonction $\tilde{f}$, continue sur $[a,b]$, est le prolongement par continuité de f à $[a,b]$. Soit $\tilde{F}$ une primitive de $\tilde{f}$ sur $[a,b]$. Soit $X \in]a,b]$. Comme $\tilde{F}$ est dérivable donc continue (à droite) en a, on a :

$$\lim_{X\to a^+}\int_X^b f(x)\,dx = \lim_{X\to a^+}\int_X^b \tilde{f}(x)\,dx = \lim_{X\to a^+}(\tilde{F}(b) - \tilde{F}(X)) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$$

2. Preuve analogue en considérant le prolongement par continuité de f au segment $[a,b]$ définie par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in [a,b[$ et $\tilde{f}(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. □

Exemple. L'intégrale généralisée $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge car $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est continue sur $]0,1]$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.
I est donc l'intégrale sur $[0,1]$ de la fonction $\tilde{f}$, *continue sur* $[0,1]$, définie par : $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in]0,1]$ et $\tilde{f}(0) = 1$.

Exercice 3. Prouver que les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\cos x - \cos 2x}{x}\,dx$ et $\int_1^2 \frac{\ln x}{x-1}\,dx$ convergent.

Proposition 3 *Soient f et $g \in \mathcal{C}^0_m([a,b[,\mathbb{R})$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.*
Si $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ existent, alors $\int_a^b \big(\alpha f(x) + g(x)\big)\,dx$ existe et

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + g(x)\big)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Preuve. Pour tout $X \in [a,b[$, $\int_a^X \big(\alpha f(x) + g(x)\big)\,dx = \alpha\int_a^X f(x)\,dx + \int_a^X g(x)\,dx$.
D'où le résultat souhaité en faisant tendre X vers b. □

Proposition 4 *Soient f et $g \in \mathcal{C}^0_m([a,b[,\mathbb{R})$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.*
Si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge et $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge, alors $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx$ diverge.

Preuve. Supposons que $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx$ converge. Comme $\int_a^b -f(x)\,dx$ converge,

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \big(f(x) + g(x) - f(x)\big)\,dx$$

serait convergente d'après la proposition 3. Contradiction. D'où la divergence de $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx$. □

2 Exemples fondamentaux.

2.1 Intégrales de Riemann.

Proposition 5 `[Riemann en` $+\infty$`]`. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ existe si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve. Soit $X > a$. Si $\alpha \neq 1$, $\int_a^X \frac{dx}{x^\alpha} = \int_a^X x^{-\alpha}\,dx = [\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_a^X = \frac{1}{1-\alpha}(X^{1-\alpha} - a^{1-\alpha})$.
Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_a^X \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$ donc $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge.
Si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_a^X \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ donc $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge.
Enfin si $\alpha = 1$, $\lim\limits_{X\to+\infty}\int_a^X \frac{dx}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty}(\ln X - \ln a) = +\infty$ donc $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge. □

Proposition 6 [Riemann en 0]. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ existe si et seulement si $\alpha < 1$.*

Preuve. Soit $\varepsilon \in]0, b[$. Si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = \int_\varepsilon^b x^{-\alpha}\,dx = [\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_\varepsilon^b = \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha})$.
Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ donc $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge.
Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge.
Enfin si $\alpha = 1$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^b \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\ln b - \ln\varepsilon) = +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^b \frac{1}{x}\,dx$ diverge. □
Les deux énoncés suivants généralisent le résultat de la proposition précédente :

Proposition 7 [Riemann en a]. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors :*

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \quad \textit{existe si et seulement si } \alpha < 1.$$

Preuve. Soit $X \in]a, b]$. Si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_X^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}[(x-a)^{1-\alpha}]_X^b = \frac{1}{1-\alpha}((b-a)^{1-\alpha} - (X-a)^{1-\alpha})$.
Si $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ existe car $\displaystyle\lim_{X\to a^+} \int_X^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \in \mathbb{R}^+$ et, si $\alpha > 1$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ diverge car $\displaystyle\lim_{X\to a^+} \int_X^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = +\infty$.
De plus, si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x-a}$ diverge car $\displaystyle\lim_{X\to a^+} \int_X^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{X\to a^+} (\ln(b-a) - \ln(X-a)) = +\infty$. □

Proposition 8 [Riemann en b]. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Alors :*

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \quad \textit{existe si et seulement si } \alpha < 1.$$

Preuve. Exercice. □

2.2 Exponentielle en $+\infty$.

Proposition 9 *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx$ existe si et seulement si $\alpha < 0$.*

Preuve. Soit $X > a$. Si $\alpha \neq 0$, $\displaystyle\int_a^X e^{\alpha x}\,dx = [\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}]_a^X = \frac{e^{\alpha X} - e^{\alpha a}}{\alpha}$. Donc, si $\alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_a^X e^{\alpha x}\,dx = -\frac{e^{\alpha a}}{\alpha}$ et, si $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_a^X e^{\alpha x}\,dx = +\infty$. Enfin, si $\alpha = 0$, $\displaystyle\int_a^X e^{\alpha x}\,dx = \int_a^X 1\,dx = X - a \underset{X\to+\infty}{\to} +\infty$.
En particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ existe et est égale à 1. □

2.3 Logarithme en 0.

Proposition 10 *Soit $a > 0$. L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^a \ln x\,dx$ converge.*

Preuve. En effet, pour tout $\epsilon \in]0, a[$, $\displaystyle\int_\epsilon^a \ln x\,dx = [x\ln x - x]_\epsilon^a = a\ln a - a - \epsilon\ln\epsilon + \epsilon$. Donc $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^a \ln x\,dx = a\ln a - a$. En particulier, $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ existe et est égale à -1. □

3 Intégrales généralisées de fonctions positives.

Proposition 11 *Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a, b[, \mathbb{R}^+)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.*
La fonction $F : X \mapsto \displaystyle\int_a^X f(x)\,dx$ est croissante sur $[a, b[$ et :
1. Si F est majorée sur $[a, b[$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sup_{X\in[a,b[} F(X)$.
En particulier, $\forall X \in [a, b[$, $\displaystyle\int_a^X f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$.
2. Si F n'est majorée sur $[a, b[$, $\displaystyle\lim_{X\to b} \int_a^X f(x)\,dx = +\infty$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ est divergente.
Mêmes conclusions avec $f \in \mathcal{C}_m^0(]a, b], \mathbb{R}^+)$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Preuve. Commençons par vérifier que F est croissante sur $[a, b[$. Soit $(X_1, X_2) \in [a, b[^2$ tel que $X_1 \leq X_2$.
Par la relation de Chasles, $F(X_2) - F(X_1) = \displaystyle\int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx$. Or f est positive sur $[X_1, X_2]$, donc, par positivité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{X_1}^{X_2} f(x)\,dx \geq 0$, c'est-à-dire $F(X_2) \geq F(X_1)$.
1. Si F est majorée sur $[a, b[$, le sous-ensemble $F([a, b[) = \{F(X), X \in [a, b[\}$ de $\mathbb{R}^+$, non vide et majoré, admet une borne supérieure S. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $S - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $F([a, b[)$, il existe $X_0 \in [a, b[$ tel que $F(X_0) > S - \varepsilon$. Or F est croissante sur $[a, b[$, donc

$\forall X \in [X_0, b[$, $S - \varepsilon < F(X_0) \leq F(X) \leq S$. Par conséquent, $\forall X \in [X_0, b[$, $|F(X) - S| = S - F(X) < \varepsilon$. Donc $\lim_{X \to b} \int_a^X f(x)\,dx = S$. Ainsi $\int_a^b f(x)\,dx$ converge et est égale à $S = \sup_{X \in [a,b[} F(X)$.

2. Supposons F non majorée sur $[a, b[$. Soit $A > 0$. Il existe $X_1 \in [a, b[$ tel que $F(X_1) \geq A$. Or F est croissante sur $[a, b[$, donc $\forall X \in [X_1, b[$, $F(X) \geq A$ car $F(X) \geq F(X_1)$. Donc $\lim_{X \to b} \int_a^X f(x)\,dx = +\infty$ et $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge. □

Remarque 2 `[Positivité de l'intégrale].` *Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.*
Si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Preuve. Soit $X \in [a, b[$. L'intégrale $\int_a^X f(x)\,dx$ est positive car c'est l'intégrale d'une fonction continue par morceaux et positive sur le segment $[a, X]$. Donc, d'après la proposition 11, $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^X f(x)\,dx \geq 0$. □

Remarque 3 *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ telle que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.*
Alors $\forall x \in [a, b[$, $f(x) = 0$.

Preuve. Soit $X \in [a, b[$. On a $\int_a^X f(x)\,dx = 0$ car $\int_a^X f(x)\,dx \geq 0$ et par la proposition 11, $\int_a^X f(x)\,dx \leq 0$. Comme f est **continue** et positive sur $[a, X]$, alors $\forall x \in [a, X]$, $f(x) = 0$. D'où $\forall x \in [a, b[$, $f(x) = 0$ car $X \in [a, b[$ est quelconque. □

Théorème 1 `[Comparaison].` *Soient f et $g \in \mathcal{C}^0_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.*
Supposons l'existence de $c \in [a, b[$ tel que $\forall x \in [c, b[$, $f(x) \leq g(x)$. Alors :
1. Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
2. Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, $\int_a^b g(x)\,dx$ diverge.
Mêmes conclusions avec f et $g \in \mathcal{C}^0_m(]a, b], \mathbb{K})$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ s'il existe $c \in]a, b]$ tel que $\forall x \in]a, c]$, $f(x) \leq g(x)$ (exercice).

Preuve. 1. Posons, pour tout $X \in [c, b[$, $U(X) = \int_c^X f(x)\,dx$ et $V(X) = \int_c^X g(x)\,dx$. Comme $\forall x \in [c, b[$, $f(x) \leq g(x)$, on a, par croissance de l'intégrale, $\forall X \in [c, b[$, $U(X) \leq V(X)$. Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, $\int_c^b g(x)\,dx$ converge et par la proposition 11, $\forall X \in [c, b[$, $V(X) \leq \int_c^b g(x)\,dx$. Donc U est majorée sur $[c, d[$ par $\int_c^b g(x)\,dx$ et à nouveau par la proposition 11, $\int_c^b f(x)\,dx$ converge. Finalement $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
2. C'est la contraposée de 1. □

Exercice 4. Prouver que $\int_0^1 \sin^2(\frac{1}{t})\,dt$ converge. La proposition 2 permet-elle de justifier cette convergence ?

Exercice 5. Prouver que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

Théorème 2 `[Equivalence].` *Soient f et $g \in \mathcal{C}^0_m([a, b[, \mathbb{R}^+)$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.*
Si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$ alors les intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature, c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
Même résultat avec f et $g \in \mathcal{C}^0_m(]a, b], \mathbb{R}^+)$ telles que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ (exercice).

Preuve. Par hypothèse, $f = gh$ avec $\lim_{x \to b} h(x) = 1$. Donc il existe $c \in [a, b[$ tel que $\forall x \in [c, b[$, $\frac{1}{2} \leq h(x) \leq \frac{3}{2}$ et comme g est positive, $\forall x \in [c, b[$, $\frac{1}{2}\, g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}\, g(x)$ $(*)$.
Supposons que $\int_a^b g(x)\,dx$ converge. Alors $\int_c^b \frac{3}{2}\, g(x)\,dx$ converge et, d'après $(*)$, $\int_c^b f(x)\,dx$ converge, par comparaison de fonctions positives (cf. théorème 1). Donc $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.
Supposons que $\int_a^b f(x)\,dx$ converge. Alors $\int_c^b 2f(x)\,dx$ converge et, d'après $(*)$, $\int_c^b g(x)\,dx$ converge, par comparaison de fonctions positives (cf. théorème 1). Donc $\int_a^b g(x)\,dx$ converge. □

Exercice 6. Nature de $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$.

Remarque 4 *La preuve du théorème 2 montre qu'il suffit que g soit positive car $(*)$ implique f positive sur $[c, b[$.*

Exercice 7. Prouver l'existence de $\int_1^{+\infty} (\frac{1}{x} - \arctan(\frac{1}{x}))\,dx$ et calculer sa valeur.

Exercice 8. Nature de $\int_0^{+\infty} (\sqrt[4]{x^4 + 1} - x)\,dx$.

Remarque 5 `[Equivalent négatif]`. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.*
Soient $f \in \mathcal{C}_m^0([a,b[,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_m^0([a,b[,\mathbb{R}^-)$ telles que $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$. Alors les intégrales $\int_a^b f(x)\,dx$ et $\int_a^b g(x)\,dx$ sont de même nature.
En effet, comme $-f(x) \underset{x\to b}{\sim} -g(x)$, on obtient par le théorème 2 et la remarque 4 que $\int_a^b -f(x)\,dx$ et $\int_a^b -g(x)\,dx$ sont de même nature.
D'où le résultat annoncé car si $u \in \mathcal{C}_m^0([a,b[,\mathbb{R})$, $\int_a^b -u(x)\,dx$ et $\int_a^b u(x)\,dx$ sont de même nature.

Exercice 9. a. Prouver que $J = \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx$ et $K = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx$ convergent.
b. Prouver que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 0$.

Proposition 12 `[Critère de Riemann ou règle` $x^\alpha f(x)$ `en` $+\infty$`]`.
Soit $f \in \mathcal{C}_m^0([a,+\infty[,\mathbb{R}^+)$, avec $a > 0$.
1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Preuve. 1. Il existe $c \geq a$ tel que $\forall x \geq c$, $x^\alpha f(x) \leq 1$ ou encore tel que $\forall x \geq c$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$.
Or $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha > 1$), donc, par le théorème de comparaison de fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge car $\int_a^c f(x)\,dx$ existe.
2. Il existe $c \geq a$ tel que $\forall x \geq c$, $x^\alpha f(x) \geq 1$ ou encore tel que $\forall x \geq c$, $f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}$.
Or $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha \leq 1$), donc, par le théorème de comparaison de fonctions positives, $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.
Donc $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge. □

Exercice 10. Prouver que $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}}\,dx$ converge.

Proposition 13 `[Critère de Riemann ou règle` $x^\alpha f(x)$ `en 0]`.
Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(]0,b],\mathbb{R}^+)$, avec $b > 0$.
1. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{x\to0^+} x^\alpha f(x) = 0$ alors $\int_0^b f(x)\,dx$ converge.
2. S'il existe $\alpha \geq 1$ tel que $\lim_{x\to0^+} x^\alpha f(x) = +\infty$ alors $\int_0^b f(x)\,dx$ diverge.

Preuve. 1. Il existe $c \in]0,b]$ tel que $\forall x \in]0,c]$, $x^\alpha f(x) \leq 1$ ou encore tel que $\forall x \in]0,c]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{x^\alpha}$.
Or $\int_0^c \frac{dx}{x^\alpha}$ converge (Riemann en 0 avec $\alpha < 1$), donc, par le théorème de comparaison de fonctions positives, $\int_0^c f(x)\,dx$ converge et $\int_0^b f(x)\,dx$ converge car $\int_c^b f(x)\,dx$ existe.
2. Il existe $c \in]0,b]$ tel que $\forall x \in]0,c]$, $x^\alpha f(x) \geq 1$ ou encore tel que $\forall x \in]0,c]$, $f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha}$.
Or $\int_0^c \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge (Riemann en 0 avec $\alpha \geq 1$), donc, par le théorème de comparaison de fonctions positives, $\int_0^c f(x)\,dx$ diverge. Donc $\int_0^b f(x)\,dx$ diverge. □

Exercice 11. Prouver que $\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$ converge en utilisant le critère de Riemann en 0.

Il faut être capable de démontrer le résultat suivant classique (mais a priori hors programme) :

Proposition 14 `[Intégrales de Bertrand en` $+\infty$`]`.
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Preuve. Rappelons le résultat de puissances comparées bien connu suivant : $\forall d \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^d}{x^\varepsilon} = 0$.
Posons, pour tout $x \geq 2$, $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$. Cette fonction f est une fonction continue et positive sur $[2,+\infty[$.
1. Supposons $\alpha > 1$. Soit $\gamma \in]1,\alpha[$. Alors $x^\gamma f(x) = \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x^{\alpha-\gamma}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.
Donc d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.
2. Supposons $\alpha < 1$. Soit $\gamma \in]\alpha,1[$. Alors $x^\gamma f(x) = \frac{x^{\gamma-\alpha}}{(\ln x)^\beta} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.

Donc d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

3. Supposons $\alpha = 1$. Soit $X \geq 2$. En effectuant le changement de variable $u = \ln x$, on a : $\int_2^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{du}{u^\beta}$.

Donc si $\beta \neq 1$, $\int_2^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = [\frac{u^{1-\beta}}{1-\beta}]_{\ln 2}^{\ln X} = \frac{1}{1-\beta}((\ln X)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta})$. Par conséquent :

- si $\beta > 1$, $\lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{\beta - 1}$ donc $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge,
- si $\beta < 1$, $\lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{dx}{x(\ln x)^\beta} = +\infty$ donc $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Enfin, si $\beta = 1$, $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge car $\lim_{X\to+\infty} \int_2^X \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{X\to+\infty} \big[\ln(\ln x)\big]_2^X = \lim_{X\to+\infty} \big(\ln(\ln X) - \ln(\ln 2)\big) = +\infty$. □

4 Intégrale absolument convergente. Intégrale semi-convergente.

Dans cette section, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$ et I est un intervalle semi-ouvert ou ouvert d'extrémités a et b.

4.1 Absolue convergence.

Définition 3 `[Convergence absolue]` *Soit* $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

On dit que $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge absolument (ou est absolument convergente) si* $\int_a^b |f(x)|\,dx$ *converge.*

Exemple. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ converge absolument. En effet, soit $f : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin x}{x^2} \end{array}$.

La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \geq 1$, $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$), $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$ converge par comparaison de fonctions positives.

Théorème 3 `[La convergence absolue implique la convergence]` *Soit* $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{K})$.

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge absolument, alors* $\int_a^b f(x)\,dx$ *converge et* $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Preuve. Supposons donc que $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge. Distinguons deux cas :

1^er^ cas : *f est à valeurs réelles.* Posons pour tout $x \in I$, $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.

En considérant les deux cas $f(x) \geq 0$ et $f(x) \leq 0$, on vérifie que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ et } |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

En particulier, $\forall x \in I$, $0 \leq f^+(x) \leq |f(x)|$ et $0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$ car $f^+(x) \geq 0$ et $f^-(x) \geq 0$.

Donc $\int_a^b f^+(x)\,dx$ et $\int_a^b f^-(x)\,dx$ convergent par comparaison de fonctions positives.

D'où la convergence de $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx$ (cf. prop. 3).

2^e^ cas : *f est à valeurs complexes.* Rappelons que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Re}\ z| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$.

En particulier $\forall x \in I$, $|\mathrm{Re}\ f(x)| \leq |f(x)|$ et $|\mathrm{Im}\ f(x)| \leq |f(x)|$. Donc $\int_a^b |\mathrm{Re}\ f(x)|\,dx$ et $\int_a^b |\mathrm{Im}\ f(x)|\,dx$ convergent par comparaison de fonctions positives. En d'autres termes, $\int_a^b \mathrm{Re}\ f(x)\,dx$ et $\int_a^b \mathrm{Im}\ f(x)\,dx$ convergent *absolument*. Et comme $\mathrm{Re}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$ sont à valeurs réelles, $\int_a^b \mathrm{Re}\ f(x)\,dx$ et $\int_a^b \mathrm{Im}\ f(x)\,dx$ convergent (cf. 1^er^ cas). Finalement, comme $f = \mathrm{Re}\ f + i\mathrm{Im}\ f$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \mathrm{Re}\ f(x)\,dx + i\int_a^b \mathrm{Im}\ f(x)\,dx$ converge.

Supposons enfin pour fixer les idées que $I = [a, b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, les autres cas se traitant de manière analogue. En faisant tendre X vers b dans l'inégalité suivante, vérifiée pour tout $X \in [a, b[$,

$$|\int_a^X f(x)\,dx| \leq \int_a^X |f(x)|\,dx,$$

on obtient bien que $|\int_a^b f(x)\,dx| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$. □

Proposition 15 *Soit* $\alpha > 1$. *Soient* $a > 0$ *et* $f \in \mathcal{C}_m^0([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *telle que* $f(x) = \underset{x\to+\infty}{O}(\frac{1}{x^\alpha})$.

Alors $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *converge absolument, donc converge.*

Preuve. Par hypothèse, f est le produit de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ et d'une fonction bornée au voisinage de $+\infty$. Ainsi, il existe $c \in [a, +\infty[$ et $M > 0$ tels que $\forall x \in [c, +\infty[$, $|f(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha}$. Or $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha > 1$), donc $\int_c^{+\infty} \frac{M}{x^\alpha}\,dx$ converge et $\int_c^{+\infty} |f(x)|\,dx$

converge par comparaison de fonctions positives. D'où la convergence de $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ car $\int_a^c |f(x)|\,dx$ existe comme intégrale d'une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. $\square$

Proposition 16 *Soit $\alpha < 1$. Soient $b > 0$ et $f \in \mathcal{C}_m^0(]0,b],\mathbb{K})$ telle que $f(x) = \underset{x\to 0^+}{O}(\frac{1}{x^\alpha})$.*
Alors $\int_0^b f(x)\,dx$ converge absolument, donc converge.

Preuve. Par hypothèse, f est le produit de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ et d'une fonction bornée au voisinage de 0. Ainsi, il existe $c \in]0,b[$ et $M > 0$ tels que $\forall x \in]0,c]$, $|f(x)| \leq \frac{M}{x^\alpha}$. Or $\int_0^c \frac{dx}{x^\alpha}$ converge (Riemann en 0 avec $\alpha < 1$), donc $\int_0^c \frac{M}{x^\alpha}\,dx$ converge et $\int_0^c |f(x)|\,dx$ converge par comparaison de fonctions positives. D'où la convergence de $\int_0^b |f(x)|\,dx$ car $\int_c^b |f(x)|\,dx$ existe comme intégrale d'une fonction continue par morceaux sur le segment $[c,b]$. $\square$

4.2 Intégrale semi-convergente.

Définition 4 *Une intégrale généralisée convergente, mais non absolument convergente, est dite semi-convergente.*

Proposition 17 `[Un exemple à connaître.]` *L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ est semi-convergente.*

Preuve. 1. Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

Posons, pour $X \geq 1$, $I(X) = \int_1^X \frac{\sin x}{x}\,dx$. En intégrant par parties : $I(X) = \big[-\frac{\cos x}{x}\big]_1^X - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,dx$.
Or $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge absolument par comparaison car pour tout $x \geq 1$, $|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge (Riemann en $+\infty$ avec $\alpha = 2 > 1$). Donc, par théorème, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge.
De plus, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{X\to+\infty} \frac{\cos X}{X} = 0$ car $\frac{|\cos X|}{X} \leq \frac{1}{X}$ et $\lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} = 0$.
Donc $\lim_{X\to+\infty} \big[-\frac{\cos x}{x}\big]_1^X = \lim_{X\to+\infty} (-\frac{\cos X}{X} + \cos 1) = \cos 1$. On obtient finalement que

$$\lim_{X\to+\infty} I(X) = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx \in \mathbb{R}.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

2. Montrons que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverge.

Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x \leq |\sin x|$. Or $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$, donc $\forall x \geq 1$, $\frac{|\sin x|}{x} \geq \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}$.
En intégrant par parties, on montre comme en 1. que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,dx$ converge. Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$ diverge (cf. prop. 4) car $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge, et enfin, par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ diverge. $\square$

Exercice 12. En remarquant que $1 - \cos$ est aussi une primitive de sin, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$.

5 Fonctions intégrables.

Définition 5 *Soit $f \in \mathcal{C}_m^0(I,\mathbb{K})$. On dit que f est intégrable sur I si $\int_a^b f(x)\,dx$ converge* **absolument**, *c'est-à-dire si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge.*

Exemple. Soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{\mathrm{sh}(x)}$.
Vérifions qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, c'est-à-dire que $\int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$ existe.
1. *Existence de* $\int_0^\pi |f(x)|\,dx$. Pour tout $x \in]0,\pi]$, $|f(x)| = f(x)$. Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ et f est prolongeable par continuité (à droite) en 0. Donc $\int_0^\pi |f(x)|\,dx = \int_0^\pi f(x)\,dx$ existe.
2. *Existence de* $\int_\pi^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Pour tout $x \geq \pi$, $|f(x)| \leq \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$. Or $\frac{1}{\mathrm{sh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{-x}$ et $\int_\pi^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge, donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}\,dx$ converge par équivalence de fonctions positives. Finalement $\int_\pi^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge par comparaison de fonctions positives.

Exercice 13. $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

Proposition 18 *L'ensemble, noté $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$, des fonctions continues par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et intégrables sur I, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_m(I,\mathbb{K})$.*

Preuve. (i) $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ est non vide : la fonction nulle sur I, notée θ, est intégrable sur I car $\displaystyle\int_a^b |\theta(x)|\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0$.
(ii) Vérifions que $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient f et g deux fonctions intégrables sur I. Alors $\lambda f + g$ est intégrable sur I. En effet, $\forall x \in I$, $|\lambda f(x) + g(x)| \leq |\lambda||f(x)| + |g(x)|$ et on conclut avec la proposition 3 et le théorème de comparaison de fonctions positives. $\square$

Proposition 19 *Soit $\mathcal{L}^1_C(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions* **continues** *et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Alors $\mathcal{L}^1_C(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ et l'application N_1 :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L}^1_C(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{R}^+ \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx \end{array}$$

est une norme sur $\mathcal{L}^1_C(I,\mathbb{K})$.

Preuve. Exercice. On utilisera la remarque 3. $\square$

6 Suites, séries et intégrales généralisées.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Proposition 20 *Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b[,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ existe. Soit (b_n) une suite croissante de $[a,b[$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = b$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^{b_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.*

Preuve. Posons $J = \int_a^b f(x)\,dx$ et à nouveau, pour tout $X \in [a,b[$, $F(X) = \int_a^X f(x)\,dx$. Par hypothèse, $\displaystyle\lim_{X\to b} F(X) = J$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $X_0 \in [a,b[$ tel que, pour tout $X \in [X_0,b[$, $|F(X) - J| \leq \varepsilon$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $X_0 \leq b_n < b$. Par conséquent, $\forall n \geq N$, $|F(b_n) - J| \leq \varepsilon$. Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} F(b_n) = J$. $\square$

Proposition 21 `[Application : une autre preuve de la divergence de` $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$ `(cf. prop. 17)]`

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt$.
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{k+1}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\int_{\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}$.
Conclure, en raisonnant par l'absurde, à la divergence de $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\,dx$.

Proposition 22 *Soit $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b[,\mathbb{R}^+)$. On suppose l'existence d'une suite croissante (b_n) de $[a,b[$ telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = b \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_a^{b_n} f(x)\,dx = \ell \in \mathbb{R}^+.$$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge et est égale à ℓ.

Preuve. D'après la Proposition 11, $F : x \mapsto \int_a^X f(x)\,dx$ est croissante sur $[a,b[$.
Prouvons que F est majorée sur $[a,b[$ par ℓ. Soit $X \in [a,b[$. Comme (b_n) est une suite croissante de limite $b > X$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $X < b_N$. Remarquons que la suite $(F(b_n))$ est croissante. Comme elle converge par hypothèse vers ℓ, on a $F(b_N) \leq \ell$. Or $F(X) \leq F(b_N)$, donc $F(X) \leq \ell$. D'après la Proposition 11, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge et est égale à ℓ d'après la proposition précédente. $\square$

Le résultat suivant montre que l'intégrabilité d'une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^+$ **n'implique pas** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Proposition 23 *Il existe une fonction continue,* **positive et non majorée sur** $\mathbb{R}^+$ *telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ converge.*

Preuve. Considérons la fonction continue f définie de la façon suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(n) = n,\ f(n - \frac{1}{2n^3}) = f(n + \frac{1}{2n^3}) = 0,$$

f est affine sur chaque segment $[n - \frac{1}{2n^3}, n + \frac{1}{2n^3}]$ et nulle sinon .
On constate (faire un dessin !) que $\displaystyle\int_0^{n+\frac{1}{2n^3}} f(x)\,dx$ est la somme d'aire de triangles $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k^2}$. La proposition 22, utilisée avec $b_n = n + \frac{1}{2n^3}$ et $b = +\infty$ implique alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge et est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k^2}$. $\square$

Rappelons maintenant le résultat de comparaison série-intégrale énoncé dans le chapitre séries sous une forme légèrement différente :

Proposition 24 *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et décroissante sur $[n_0, +\infty[$.*
La série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

Preuve. Commençons par établir deux résultats élémentaires.
a. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n_0$. Comme f est décroissante sur $[k, k+1]$, on a $\forall t \in [k, k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$.
Par conséquent, $\int_k^{k+1} f(k+1)\, dt \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt$, c'est-à-dire

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k). \tag{1}$$

b. Posons $F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\, dt$, $x \geq n_0$. La fonction F est croissante sur $[n_0, +\infty[$: en effet, soit $(x, x') \in [n_0, +\infty[^2$ tel que $x \leq x'$. D'après la relation de Chasles, $F(x') - F(x) = \int_x^{x'} f(t)\, dt \in \mathbb{R}^+$ car f est une fonction positive. Donc $F(x) \leq F(x')$.

Passons à la preuve de la proposition 24 :

c. Supposons tout d'abord que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \ell \in \mathbb{R}^+$. D'après (1), pour tout $n \geq n_0 + 1$, $0 \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$. Or la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\, dt$, $n \geq n_0 + 1$, converge car, d'après la relation de Chasles,

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n_0+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\, dt = \lim_{N \to +\infty} \int_{n_0}^{N} f(t)\, dt = \lim_{N \to +\infty} F(N) = \ell$$

donc la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge par comparaison de termes généraux positifs (Proposition 1. a).

d. Supposons maintenant que la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge et montrons que F admet une limite finie en $+\infty$. Raisonnons par l'absurde. Si F n'admet pas de limite finie en $+\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ car F est croissante sur $[n_0, +\infty[$. Or, pour tout $N \geq n_0 + 1$, $\sum_{n=n_0}^{N} f(n) = f(n_0) + \sum_{n=n_0+1}^{N} f(n) \geq f(n_0) + F(N)$. Donc $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=n_0}^{N} f(n) = +\infty$ car $\lim_{N \to +\infty} F(N) = +\infty$. En d'autres termes, la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ diverge, ce qui contredit notre hypothèse. $\square$

7 Théorème de convergence dominée.

7.1 Enoncé du théorème.

Théorème 4 *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^0_m(I, \mathbb{K})$ telle que :*
a. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction $f \in \mathcal{C}^0_m(I, \mathbb{K})$,
b. `[Hypothèse de domination]` *Il existe $g \in \mathcal{C}^0_m(I, \mathbb{R}^+)$,* **intégrable sur I**, *(i.e. $g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$) telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq g(x),$$

alors :
1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,
2. f est intégrable sur I,
3. $\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(x)\, dx = \int_I f(x)\, dx$.

La démonstration de ce théorème est hors-programme.

7.2 Exemple d'application.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x^2}{n})^{-n}\, dx$ et $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.
1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, J_n converge et que J converge.
2. Prouver que $\lim_{n \to +\infty} J_n = J$.

Preuve. 1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = (1 + \frac{x^2}{n})^{-n}$. Alors $f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et $f_n(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{n^n}{x^{2n}}$. Comme $2n \geq 2 > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{n^n}{x^{2n}}\, dx$ converge. Donc par la règle de l'équivalent positif, $\int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx$ converge et comme $\int_0^1 f_n(x)\, dx$ existe en tant qu'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction continue sur $[0,1]$, $J_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ converge.
1. b. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = e^{-x^2}$. L'application $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et $\lim_{x \to +\infty} x^2 f(x) = 0$. Donc J converge d'après le critère de Riemann en $+\infty$ ($\alpha = 2 > 1$). On aurait pu aussi utiliser $f(x) \leq e^{-x}$ si $x \geq 1$.

2. a. Soit $x \in \mathbb{R}^+$ (fixé). Comme $f_n(x) = e^{-n\ln(1+\frac{x^2}{n})}$ et que $\ln(1+\frac{x^2}{n}) = \frac{x^2}{n} + o_{+\infty}(\frac{1}{n})$, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Autrement dit, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I = \mathbb{R}^+$ vers f $(\in \mathcal{C}^0_{(m)}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}))$.

2. b. `[Vérification de l'hypothèse de domination]` *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$. Avec la formule du binôme :*

$$(1+\frac{x^2}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\frac{x^2}{n})^k \geq 1 + n.\frac{x^2}{n} = 1 + x^2.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \, \forall x \in \mathbb{R}^+, \, |f_n(x)| = f_n(x) \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Posons : $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}^+$. L'application $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$ converge. L'inégalité précédente montre donc que l'hypothèse de domination est satisfaite avec g.

Le théorème de convergence dominée permet donc d'affirmer que :
1. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (mais on le savait déjà : J_n converge),
2. f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (mais on le savait déjà : J converge),
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = J$.

7.3 Exercices utilisant le théorème de convergence dominée.

Exercice 14. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

Exercice 15. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\,dx$.

Exercice 16. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$.

Exercice 17. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+x^n}$.

Exercice 18. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx$.

Exercice 19. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx)e^{-x^n}\,dx$.

Exercice 20. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)}\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 21. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+\frac{1}{2})^n}}{\sqrt{x}}\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 22. Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers $+\infty$, de : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{1+n^2x^2}\,dx$.
Indication : effectuer le changement de variable : $t = nx$.

Exercice 23. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\,dx$.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

Exercice 24. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-3x}(1+\frac{x}{n})^n\,dx$.
Indication : considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = e^{-3x}(1+\frac{x}{n})^n$ si $x \in [0,n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

Exercice 25. Soit $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $\lambda = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$.

Justifier l'existence de I_n et de λ. Prouver que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\lambda}{n}$.

Exercice 26. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}}{1+x+x^2+\cdots+x^n}\,dx$.

Exercice 27. Soit (a_n) une suite de réels telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{ia_nx} = 1$.

Montrer, en considérant $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1+ia_n)x}\,dx$, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice 28. Déterminer un équivalent quand n tend vers $+\infty$, de : $I_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}\,dx$.

8 Intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions intégrables.

8.1 Enoncé du théorème.

Le théorème suivant est admis :

Théorème 5 *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série de fonctions de* I *dans* $\mathbb{K}$ *telle que :*

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$,

b. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge simplement sur* I *et sa somme* $f := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathcal{C}^0_m(I, \mathbb{K})$,

c. La série (à termes positifs) $\sum_{n\geq 0} \int_I |u_n(x)|\, dx$ *converge.*

Alors f *est intégrable sur* I *et* $\int_I f(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\, dx$*, c'est-à-dire :*

$$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\, dx$$

Remarque 6 *D'après c., la série* $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\, dx$ *converge car converge absolument par comparaison. En effet, on a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|\int_I u_n(x)\, dx| \leq \int_I |u_n(x)|\, dx$.

8.2 Exemple d'application.

Soient $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx$ et $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

1. Montrer que J et S convergent.

2. Montrer que $\forall x > 0$, $\frac{\sin x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin x$.

3. Montrer que $J = S$.

Preuve. 1. Posons, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1}$*. L'application* f *est continue sur* $]0, +\infty[$ *et intégrable sur* $]0, +\infty[$*. En effet,* $J = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$ *converge absolument car d'une part,* $|f|$ *est prolongeable par continuité en* 0 *puisque* $\lim_{x\to 0^+} |f(x)| = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ *et d'autre part,* $\lim_{x\to+\infty} x^2|f(x)| = 0$*. En outre, la série* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$ *converge par comparaison car, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$*, la série de Riemann* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *étant notoirement convergente.*

2. Soit $x > 0$*. Remarquons que* $\frac{\sin x}{e^x - 1} = e^{-x} \sin x \cdot \frac{1}{1 - e^{-x}}$*. Or* $\frac{1}{1 - e^{-x}}$ *est la somme de la série géométrique convergente* $\sum_{n\geq 0} (e^{-x})^n$*, de raison* $e^{-x} \in]0, 1[$*. Donc*

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1} = e^{-x} \sin x \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin x$$

3. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) = e^{-nx} \sin x$, $x > 0$ *et montrons que l'on peut appliquer le théorème précédent avec la série de fonctions* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *et* $I =]0, +\infty[$.

Vérification de a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[, \mathbb{R})$*. De plus,* u_n *est intégrable sur* $]0, +\infty[$ *: en effet, on a* $\forall x > 0$, $|u_n(x)| \leq e^{-nx}$ *et* $\int_0^{+\infty} e^{-nx}\, dx$ *converge d'après le cours. Donc* $\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\, dx$ *converge par comparaison de fonctions positives.*

Vérification de b. D'après 2., la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge simplement sur* $]0, +\infty[$ *et* $\forall x > 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = f(x)$.

Vérification de c. Il s'agit de prouver que la série $\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} e^{-nx} |\sin x|\, dx$ *converge. Remarquons tout d'abord que* $\int_0^{+\infty} e^{-nx} |\sin x|\, dx$ *converge par comparaison car* $\forall x \geq 0$, $e^{-nx}|\sin x| \leq e^{-nx}$ *et que* $\int_0^{+\infty} e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n}$ *converge. On a alors* $\int_0^{+\infty} e^{-nx} |\sin x|\, dx \leq \frac{1}{n}$ *mais cette inégalité ne permet pas de prouver le résultat cherché. Rappelons alors que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$*. On a donc* $\forall x \geq 0$, $e^{-nx}|\sin x| \leq x e^{-nx}$*. Comme* $\lim_{x\to+\infty} x^2 . x e^{-nx} = \lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-nx} = 0$, $\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\, dx$ *converge et une intégration par parties montre en fait que, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} x e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n^2}$*. L'inégalité précédente conduit à*

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx} |\sin x|\, dx \leq \int_0^{+\infty} x e^{-nx} = \frac{1}{n^2}$$

Donc la série $\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} e^{-nx}|\sin x|\,dx$ *converge par comparaison à une série de Riemann convergente.* Le théorème d'intégration terme à terme nous donne que f est intégrable sur $]0,+\infty[$ (mais ce résultat a déjà été montré ci-dessus en 1.) et que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{e^x-1}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nx}\sin x\,dx$$

Et il reste à vérifier que $\int_0^{+\infty} e^{-nx}\sin x\,dx=\frac{1}{n^2+1}$ en intégrant deux fois par parties ou en remarquant que $e^{-nx}\sin x=\mathrm{Im}\,(e^{(-n+i)x})$.

8.3 Exercices.

Exercice 29. Montrer que $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}$.

Exercice 30. Montrer que $\int_0^{1}\frac{\ln x}{1-x}\,dx=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Exercice 31. Soit $f:]0,1[\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{\ln(1-x^2)}{x^2}$.

1. Montrer que $J=\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.
2. Calculer J en écrivant J comme la somme d'une série convergente.

On rappelle que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\gamma+\ln n+\varepsilon_n$, *avec* $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$.

Exercice 32. On rappelle que pour tout $x>1$, $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

Prouver que $\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)\,dx=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln n}$.

Exercice 33. Soit $\sum_{n\geq 0} c_n$ une série de réels absolument convergente. Soit $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}c_n\frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$.