

Ondes mécaniques unidimensionnelles

Sommaire

I Équation de d'Alembert unidimensionnelle	2
I.1 Exemple 1 : ondes transversales sur une corde vibrante	2
I.2 Exemple 2 : ondes longitudinales dans une tige solide	4
I.3 Analogies entre les phénomènes de propagation dans les solides	7
I.4 Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle	8
II Deux grandes familles d'ondes	8
II.1 Ondes progressives	8
II.2 Ondes stationnaires	13
III Conséquences des conditions aux limites : exemple de la corde vibrante	14
III.1 Régime libre	14
III.2 Régime forcé	16

Questions de cours

- Montrer que les déplacements transversaux d'une corde vibrante vérifient l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. En déduire la vitesse de propagation des ondes.
- Loi de Hooke : énoncé, domaine de validité. Interprétation du module d'Young à l'aide d'un modèle microscopique.
- Montrer que les déplacements longitudinaux dans une tige solide vérifient l'équation de d'Alembert unidimensionnelle. En déduire la vitesse de propagation des ondes.
- Préciser la solution la plus générale à une équation de d'Alembert 1D. Expliciter deux bases de solutions et le lien entre ces dernières.
- Ondes progressives harmoniques : vecteur d'onde, vitesse de phase. Équation de d'Alembert 1D : résolution en complexes, relation de dispersion.
- Déterminer les modes propres d'une corde tendue entre ces deux extrémités. Expliciter succinctement la méthode de résolution connaissant les conditions initiales sur la position transversale et la vitesse de chaque élément de corde.

- ★ *Prise de notes* : A quelle vitesse se propage une onde dans un câble coaxial ? le long d'une corde de guitare que l'on gratte ? Pourquoi le son se propage-t-il plus vite dans l'eau que dans l'air ? En sup' et au lycée, lors de l'étude des ondes, vous êtes partis de propriétés expérimentales (interférences / diffraction), en posant la vitesse de l'onde comme une constante du problème (indice optique du milieu...) : vous n'avez jamais fait le lien entre cette vitesse et les propriétés du milieu, car il vous manquait l'équation de propagation de l'onde (EDP car couple des effets spatiaux et temporels).

Ce chapitre a quatre objectifs principaux :

1. Établir l'équation de d'Alembert pour la corde vibrante et pour la tige solide, en insistant sur la méthode employée. En déduire la vitesse de propagation de l'onde.
2. Expliciter la méthode pour établir une relation de dispersion.
3. Comprendre que le milieu fixe la vitesse de propagation (seulement). Ce sont les conditions aux limites qui fixent la structure de l'onde (onde progressive, onde stationnaire, fréquence d'oscillation...).
4. Distinguer le régime *libre* d'oscillation de la corde vibrante (modes propres) et le régime *forcé*.

I Équation de d'Alembert unidimensionnelle

I.1 Exemple 1 : ondes transversales sur une corde vibrante

a Hypothèses du modèle

Intéressons-nous à une corde de longueur L , masse m et masse linéique $\mu = \frac{m}{L}$. Quelques hypothèses sont nécessaires pour effectuer une modélisation simplifiée :



- La corde est considérée comme quasi-inextensible ($\mu = \text{cste}$) et souple (c'est-à-dire qu'elle n'oppose aucune résistance à sa déformation) ;
- elle est tendue entre ses deux extrémités avec une tension $T_0 \gg mg$ de sorte à négliger l'effet de son propre poids ;
- à l'équilibre, la corde est tendue horizontalement, $y(x,t) = 0, \forall t, \forall x \in [0,L]$;
- on étudie les petites déformations transversales de la corde. Ainsi en notant $\alpha(M,t)$ l'angle que fait la tangente à un point M de la corde à l'instant t , on considère que $|\alpha| \ll 1$ de sorte à linéariser l'ensemble des équations. Un point M sera alors supposé se déplacer à x fixé.

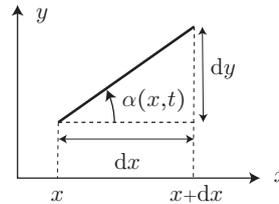
Les déformations qui vont pouvoir se propager dans la corde sont alors des ondes transversales (déformations perpendiculaires à la direction de propagation) unidimensionnelles (selon la direction (Ox)).

b Mise en équation

Considérons donc un élément infinitésimal de corde pris entre le point $M(x,y)$ et $M'(x+dx,y+dy)$. Notons $\alpha(x,t)$ l'angle entre la tangente à la corde en M et l'horizontale. Au premier ordre en α , et à t fixé (on fait un raisonnement spatial) :

★

$$\tan \alpha \simeq \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2) \simeq \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_t \implies \boxed{\alpha(x,t) = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_t} \quad (\text{I.1})$$

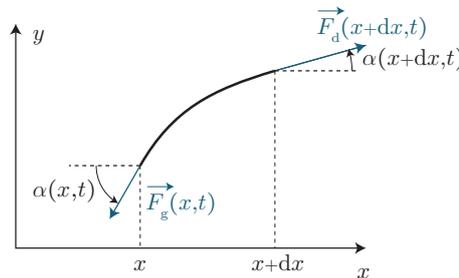


La longueur de cette portion de corde vaut alors (à t fixé) :

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \simeq dx \sqrt{1 + \alpha^2} = dx(1 + \mathcal{O}(\alpha^2)) \simeq dx \quad (\text{I.2})$$

Cet élément de corde est soumis à deux forces :

- la tension exercée par la partie droite du fil sur cet élément de corde $\vec{T}_d(x+dx,t) = \vec{T}(x+dx,t)$;
- la tension exercée par la partie gauche du fil sur cet élément de corde $\vec{T}_g(x,t)$. Or le principe des actions réciproques conduit à $\vec{T}_g(x,t) = -\vec{T}_d(x,t) = -\vec{T}(x,t)$.



Ainsi en appliquant la loi de la quantité de mouvement à cet élément de corde dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$\mu dl \left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right|_x \vec{e}_y = \vec{T}_d(x+dx,t) + \vec{T}_g(x,t) = \vec{T}(x+dx,t) - \vec{T}(x,t) \iff \mu \left. \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right|_x \vec{e}_y = \left. \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} \right|_t$$

(l'accélération se calcule pour le système, qui est à x fixé). En projection sur \vec{e}_x et \vec{e}_y :

★

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (T(x,t) \cos(\alpha(x,t)))$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} (T(x,t) \sin(\alpha(x,t)))$$

La première équation donne au premier ordre en α $T(x,t) \cos(\alpha) = T(x,t) = f(t) = T_0$ (avec la condition aux limites $T(L,t) = T_0$), donc la tension est de norme constante dans toute la corde. Tandis que l'autre équation devient :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \iff \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

Équation de d'Alembert à une dimension

On dit qu'un champ physique $f(x,t)$ vérifie une équation d'onde de d'Alembert si f est régi par l'équation linéaire aux dérivées partielles :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} \quad (\text{I.3})$$

avec c la vitesse de propagation de l'onde associée au champ physique f .

Ainsi la vitesse de propagation de perturbations transversales à une corde est reliée à la tension et la masse linéique par $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$.

Ordre de grandeur : Prenons l'exemple de l'expérience de cours (qui sera faite plus loin dans le chapitre). La corde a une masse totale $m \sim 15$ g pour une longueur totale $L \sim 3$ m. La corde est tendue via une poulie reliée à une masse $M \sim 200$ g. Estimer c .

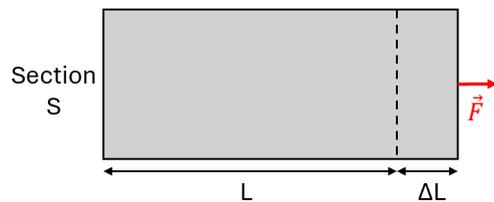
★ A.N. : $\mu = \frac{m}{L} = 5 \text{ g m}^{-1}$. Donc $c \sim 20$ m/s

I.2 Exemple 2 : ondes longitudinales dans une tige solide

Dans cette partie, on va à nouveau déterminer une équation de d'Alembert pour un système *a priori* totalement différent : une tige solide déformée de manière longitudinale. Auparavant, nous devons évoquer une loi valable dans des solides et caractérisant leur déformation.

a Loi de Hooke

On s'intéresse à caractériser la force normale $\vec{F} = F\vec{e}_x$ qu'un opérateur doit exercer pour déformer une tige solide dans la même direction que la force.



Lorsque la déformation d'un solide est faible (moins de qq % de déformation), on peut proposer une loi simple pour relier F à ΔL : (construire la formule avec eux, l'objectif étant qu'ils soient capables de la retrouver aisément)

$$F = \text{cste} \times S \frac{\Delta L}{L}$$

Loi de Hooke

Dans le domaine d'élasticité du solide (c'est-à-dire pour de faibles déformations $\Delta L/L$), la force normale F qu'un opérateur doit exercer pour allonger de ΔL une tige solide uniforme de longueur au repos L et de section S est donnée par la loi de Hooke :

$$F = E S \frac{\Delta L}{L}$$

avec E le module d'Young du solide

★ Ajouter l'unité de E

Ordre de grandeur (à connaître) : L'odg de E varie de 10 GPa (non métaux) à 100 GPa (métaux).

Calculer l'allongement ΔL d'un fil d'acier, de diamètre $d = 2.5$ mm et de longueur au repos $L = 3$ m, supportant en traction une masse $M = 500$ kg ? On donne le module d'Young de l'acier : $E = 210$ GPa.

★
$$\Delta L = \frac{MgL}{ES} = 1.4 \text{ cm}$$

, soit une déformation de $\Delta L/L = 0.5\% \ll 1$, ce qui semble valider le modèle élastique.

Interprétations et remarques :

- *Vocabulaire* : Le rapport F/S est appelé *contrainte (normale)* appliquée au solide (cf. chapitres de mécanique des fluides). ΔL est appelé l'*allongement* du solide, alors que $\frac{\Delta L}{L}$ est la *déformation* (ou la variation relative de longueur) (sans unité).
- .

★ *Prise de notes* : Le point clé dans la loi de Hooke est que la force est proportionnelle à l'allongement du solide. Cette loi a donc la même forme que la force qu'un opérateur doit exercer sur un ressort pour l'allonger de $\Delta\ell$: $F = K\Delta\ell$ avec K la constante de raideur du ressort. (Pas de k dans ce chapitre, car k représentera le vecteur d'onde...)

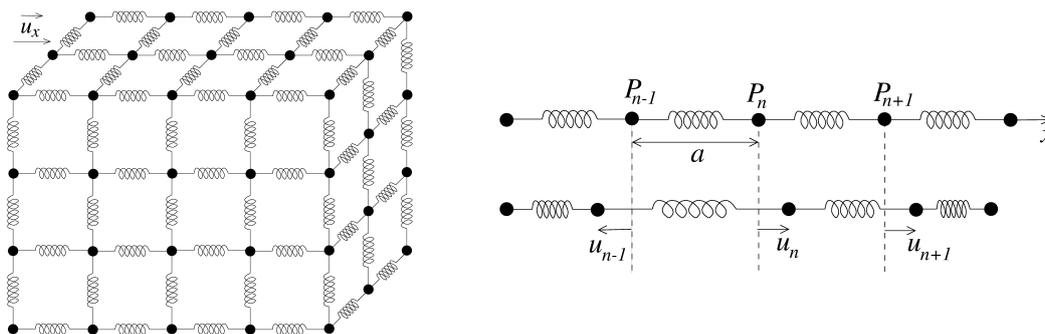
- On peut exprimer la loi de Hooke dans le cas d'une section infinitésimale du solide : $F = E \frac{\Delta L}{L} dS$.
- Expérimentalement, la mesure du module d'Young peut donc se faire avec un banc de traction.

b Modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés : passage du microscopique au mésoscopique

Dans cette sous-partie, on cherche à interpréter microscopiquement l'origine du module d'Young dans un solide. Nous allons pour cela réaliser un modèle microscopique caractérisant les mouvements des atomes dans un cristal cubique simple.

Présentation du modèle microscopique de la chaîne d'atomes élastiquement liés

Dans un cristal cubique simple de paramètre de maille a , les atomes se situent, **au repos**, aux nœuds d'un réseau cubique. Lorsqu'un opérateur extérieur exerce une force $\vec{F} = +F\vec{e}_x$ sur la face de droite du cristal, il éloigne les atomes situés tout à droite du cristal de leurs positions d'équilibre pour les attirer vers la droite. Du fait (principalement) des interactions entre les cations du réseau et les électrons, ces atomes attirent à leur tour les atomes situés à leur gauche et ainsi de suite.



On modélise alors (de manière simpliste) les interactions entre deux atomes plus proches voisins par une force élastique, de constante de raideur K identique pour tous les atomes et de longueur au repos a .

Il y a invariance du problème par translation selon \vec{e}_y et \vec{e}_z , donc on se contente d'étudier des chaînes d'atomes unidimensionnelles. Ce modèle porte donc le nom de **modèle de la chaîne d'atomes élastiquement liés**.

Pour une chaîne d'atomes, on appelle alors P_n la position de l'atome n . Le décalage entre la position P_n et la position au repos est noté $u_n(t)$.

Lien avec le module d'Young du modèle mésoscopique

Intéressons nous à une chaîne d'atomes et en particulier à l'atome n de cette chaîne.
Système : {atome n }.

La force exercée par toute la partie droite de la chaîne est : $\vec{F}_{d,n} = K(u_{n+1} - u_n)\vec{e}_x$.

Cette force est reliée à la déformation du cristal $\frac{\text{allongement entre } n \text{ et } n+1}{\text{longueur au repos entre } n \text{ et } n+1} =$

$\frac{u_{n+1} - u_n}{a}$. Donc :

$$\vec{F}_{d,n} = Ka \frac{u_{n+1} - u_n}{a} \vec{e}_x$$

★

La loi de Hooke étant une loi mésoscopique, et non microscopique, on s'intéresse désormais à la force exercée par la partie droite au niveau d'une surface infinitésimale dS contenant un grand nombre de chaînes atomiques. La force totale exercée par la partie droite est donc :

$$\vec{F}_{d,dS} = \vec{F}_{d,n} \times \text{nbr de chaînes} = \vec{F}_{d,n} \frac{dS}{a^2} = \frac{K}{a} dS \frac{u_{n+1} - u_n}{a} \vec{e}_x$$

On reconnaît la loi de Hooke et on identifie donc le module d'Young :

$$E = \frac{K}{a}$$

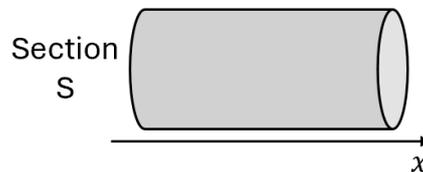
★

c Equation de d'Alembert : déformation longitudinale dans une tige solide

Nous avons désormais tous les outils pour déterminer l'équation de d'Alembert caractérisant la déformation longitudinale dans une tige solide. Pour cela, on effectue un modèle mésoscopique.

i) Hypothèses du modèle

Intéressons-nous à un solide de forme cylindrique, de section S , de longueur L et de masse volumique ρ . Quelques hypothèses sont nécessaires pour effectuer une modélisation simplifiée :



- Le rayon du solide est bien plus faible que sa longueur (en odg : $\sqrt{S} \ll L$), ce qui permet de considérer que le phénomène de propagation de la déformation dans le solide a lieu selon \vec{e}_x .
- Le solide est considéré comme quasi-incompressible et quasi-indilatable ($\rho = \text{cste}$).
- On étudie les petites déformations longitudinales du solide, ce qui permet d'utiliser la loi de Hooke.

Les déformations qui vont pouvoir se propager sont alors des ondes longitudinales (déformation dans la direction de propagation) unidimensionnelles (selon (Ox)).

★

Cette situation modélise bien la propagation d'une onde sonore (longitudinale) dans un solide.

ii) Mise en équation

- ★ Considérons une portion infinitésimale du solide pris entre les abscisses x et $x + dx$.
Schéma.

Lors du passage de l'onde, un plan d'abscisse x se décale de sa position au repos. On définit alors l'écart $u(x,t)$ entre la position du plan d'abscisse x lors du passage de l'onde et sa position au repos.

Attention, le modèle effectué ici est un modèle mésoscopique, et non microscopique : on ne s'intéresse pas à la position des atomes, mais directement à la position d'un grand nombre d'atomes du solide. Cela permet de définir une grandeur $u(x,t)$ continue de l'espace : nous sommes dans le cadre de la physique des milieux continus.

Cet élément de solide est soumis à deux forces :

- la force exercée par la partie droite du solide sur cet élément infinitésimal de solide : $\vec{F}_d(x + dx, t) = \vec{F}(x + dx, t)$.
- la force exercée par la partie gauche du solide sur cet élément infinitésimal : $\vec{F}_g(x, t)$. Or le principe des actions réciproques conduit à $\vec{F}_g(x, t) = -\vec{F}_d(x, t) = -\vec{F}(x, t)$.

On peut ré-exprimer cette force $\vec{F}(x, t)$ à l'aide de la loi de Hooke. L'allongement de la

- ★ portion infinitésimale du solide vaut : $\Delta\ell = u(x + dx, t) - u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Donc, la loi de Hooke donne : $\vec{F}(x, t) = ES \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x$.

Ainsi, en appliquant la loi de la quantité de mouvement à cette portion infinitésimale du solide dans le référentiel du laboratoire galiléen :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \vec{e}_x = \vec{F}(x + dx, t) - \vec{F}(x, t) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} dx = ES dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \vec{e}_x$$

- ★ Donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ainsi, la vitesse de propagation de perturbations longitudinales dans une tige solide est liée au module d'Young et à la masse volumique par : $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$.

Ordre de grandeur : La masse volumique usuelle d'un non métal est de l'ordre de 10^3 kg m^{-3} , celle d'un métal varie entre 10^3 kg m^{-3} et 10^4 kg m^{-3} . En déduire les ordres de grandeur de la vitesse de propagation des ondes sonores dans un solide.

- ★ $c \sim 3 \times 10^3 \text{ m/s}$ à $1 \times 10^4 \text{ m/s}$ (à comparer avec la vitesse de propagation du son dans l'air 340 m/s et dans l'eau $1.5 \times 10^3 \text{ m/s}$).

I.3 Analogies entre les phénomènes de propagation dans les solides

Les deux situations mécaniques étudiées portent sur des systèmes n'ayant a priori aucun lien. Pourtant, on aboutit dans les deux cas à une équation de d'Alembert. Quels sont les "ingrédients" pour obtenir une équation de d'Alembert (et donc une onde) dans une situation mécanique ?

Propriétés communes	Corde vibrante	Tige solide
★ Inertie du milieu	Reliée à μ	Reliée à ρ
★ Présence d'une force de rappel	Reliée à T_0	Reliée à E
★ <-> Raideur du milieu		

★ Ainsi, s'il y a déformation du système mécanique, la force de rappel tend à ramener le système dans sa situation au repos, mais du fait de l'inertie, ce retour vers la situation de repos n'est pas instantané. On retiendra que la célérité des ondes dans un milieu mécanique augmente si la raideur du milieu augmente et diminue si l'inertie augmente. (Ce qui est cohérent avec l'interprétation avec les mains.)

I.4 Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

Dans la suite, nous allons voir **3 manières différentes d'écrire la solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension** : $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$. Voici la première.

Euler montra que les fonctions de la forme $s_+(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ et $s_-(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ sont les uniques formes de solutions de l'équation de d'Alembert. Vérifions que ces fonctions sont bien solutions. Posons $u = t - x/c$:

$$\frac{\partial s_+}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{1}{c} f'(u) \implies \frac{\partial^2 s_+}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} f''(u) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 s_+}{\partial t^2} = f''(u) \quad (\text{I.4})$$

Donc f est bien solution de l'équation de d'Alembert, et il en est de même pour g .

On admet alors que la solution générale de l'équation de d'Alembert à 1D est :

1ère écriture de la solution générale de l'équation de d'Alembert 1D

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (\text{I.5})$$

ou de manière équivalente $s(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$.

L'équation de d'Alembert en elle-même n'impose pas la forme des fonctions f et g , ce sont les conditions aux limites qui l'imposent.

II Deux grandes familles d'ondes

Pour rappels, une onde consiste en le déplacement d'une perturbation à travers un système (matériel ou non). C'est donc un cas particulier de champs avec un couplage spatio-temporel.

II.1 Ondes progressives

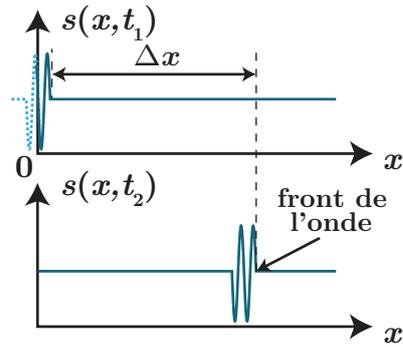
a Définition générale

Une onde est progressive si elle se propage sans déformation.

Montrons que, si une onde s'écrit sous la forme $s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$, alors cette onde est progressive.

Connaissant l'allure de l'onde à l'instant t_1 , qu'en est-il à l'instant $t_2 = t_1 + \Delta t$?

$$\begin{aligned} s(x, t_1 + \Delta t) &= f\left(t_1 + \Delta t - \frac{x}{c}\right) \\ &= f\left(t_1 - \frac{(x - c\Delta t)}{c}\right) \\ &= s(x - c\Delta t, t_1) \end{aligned}$$



c'est-à-dire la même courbe, mais translatée spatialement de $\Delta x = c\Delta t$ vers les x croissants : l'onde s'est propagée sans déformation à la vitesse c . $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ décrit donc une onde progressive dans le sens des x croissants, et de même $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ décrit une onde progressive dans le sens des x décroissants.

Ainsi, les solutions générales de l'équation de d'Alembert 1D peuvent s'écrire comme une somme de deux ondes progressives contra-propageantes, se propageant à la vitesse c .

★  $f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ est une onde progressive, $g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ est une onde progressive, mais $f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$ n'est PAS une onde progressive.

b Ondes progressives harmoniques

i) Définition générale

Une onde progressive est harmonique (OPH) ou monochromatique si sa fonction d'onde est sinusoïdale :

$$s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

avec ω la pulsation de l'onde, $\vec{k} = k\vec{e}_x$ le vecteur d'onde indiquant la direction et le sens de propagation et φ la phase à l'origine des temps et de l'espace.

Comme l'onde est progressive harmonique, il y a un lien entre ω , k et la vitesse de propagation de l'OPH :

$$★ \quad s(x, t) = s_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{k}{\omega}x\right) + \varphi\right) = s_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right) + \varphi\right)$$

On identifie $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ la vitesse de phase de l'onde.

Interprétation de la vitesse de phase v_φ

On définit la phase totale de l'onde par $\Psi(x, t) = \omega t - kx + \varphi$. À phase totale égale, les vibrations sont égales. La vitesse de phase est donc la vitesse à laquelle se déplacent des points de phase égale. C'est la vitesse de propagation dans le cas où l'onde est progressive harmonique.

★ Schéma selon x d'une OPH à t_1 , puis à $t_2 > t_1$, en mettant en évidence un point de phase égale sur les deux graphes.

Dans le cas général, la vitesse de phase varie avec la pulsation de l'onde : $v_\varphi(\omega)$.

Remarque : Si l'onde est solution de l'équation de d'Alembert, alors nous retrouverons juste après que $v_\varphi(\omega) = c = \text{cste}$.

Remarque : Il existe une autre démonstration permettant de déterminer l'expression de la vitesse de phase. Elle consiste à dire que l'on cherche la vitesse à laquelle se propage un point de phase $\Psi = \text{cste}$.

On différentie alors Ψ :

$$d\Psi = 0 = \omega dt - k dx \Rightarrow v_\varphi = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

ii) Double périodicité

Soit une OPH décrite par $s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)$. Elle possède une période temporelle T :

$$\begin{aligned} \forall(x,t) \quad s(x,t+T) = s(x,t) &\iff \cos(\omega t + \omega T - kx + \varphi) = \cos(\omega t - kx + \varphi) \\ &\implies \omega T = 2\pi \iff \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \end{aligned}$$

mais également une période spatiale λ , la longueur d'onde :

$$\forall(x,t) \quad s(x+\lambda,t) = s(x,t) \iff \cos(\omega t - kx - k\lambda + \varphi) = \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (\text{II.1})$$

$$\implies k\lambda = 2\pi \implies \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}} \quad (\text{II.2})$$

On peut réécrire la longueur d'onde en faisant intervenir la vitesse de propagation de l'OPH :

$$\star \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v_\varphi}{\omega} = v_\varphi T$$

On retrouve le couplage spatio-temporel.

iii) Relation de dispersion

En passant en notations complexes, $\underline{s}(x,t) = s_0 e^{j(\omega t - kx + \varphi)} = \underline{s}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ avec $\underline{s}_0 = s_0 e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe. On retrouve alors l'intérêt de l'introduction des notations complexes :

$$\star \quad \frac{\partial \underline{s}}{\partial t} = j\omega \underline{s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{s}}{\partial x} = -jk \underline{s} \quad (\text{II.3})$$

 Dans certains domaines de la physique, on préfère la convention $e^{j(kx - \omega t)}$, ce qui ne change rien au sens physique. Dans ce cas les relations précédentes sont différentes. Il faut donc conserver tout le long d'un raisonnement les mêmes notations (et bien définir le choix que vous faites sur la définition de la notation complexe que vous utilisez).

 L'utilisation des grandeurs complexes est à proscrire dès qu'on manipule des produits de fonctions ou des équations différentielles non linéaires !

Une relation de dispersion est une relation reliant ω et k . Cette relation permet donc d'expliciter la vitesse de phase $v_\varphi(\omega)$.

Méthode systématique pour déterminer une relation de dispersion

1. Chercher la solution de l'équation d'onde sous la forme d'une onde progressive harmonique, et passer en notation complexe.
2. Après avoir injecté cette fonction d'onde dans l'équation d'onde, déterminer le lien entre ω et k .

Exercice : Déterminer la relation de dispersion associée à l'équation de d'Alembert.

On cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme $\underline{s} = \underline{s}_0 e^{j(\omega t - kx)}$.
On a donc :

$$\star \quad c^2 (-jk)^2 \underline{s} = (j\omega)^2 \underline{s} \implies \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

On a alors deux solutions $k = \pm \frac{\omega}{c}$, traduisant les deux directions possibles de la propagation d'une onde progressive. On obtient $v_\varphi(\omega) = \pm c = \text{cste}$ pour l'équation de d'Alembert.

iv) Intérêts des OPH

- ★ L'intérêt d'introduire les OPH est que l'on peut faire des calculs plus simples en utilisant les notations complexes. Cependant une OPH n'existe pas, car elle serait infiniment étendue dans le temps et l'espace. Mais alors, comment décrire une onde réelle ?

Nous allons pour cela nous servir de l'analyse de Fourier.

Rappels sur l'analyse de Fourier dans le cas d'une fonction $s(t)$ périodique

On peut décomposer tout signal périodique comme une somme de sinusoïdes. On parle de développement en *série de Fourier* :

Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ se décompose de *manière unique* en une somme de sinusoïdes :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos n\omega t + \varphi_n$$

★

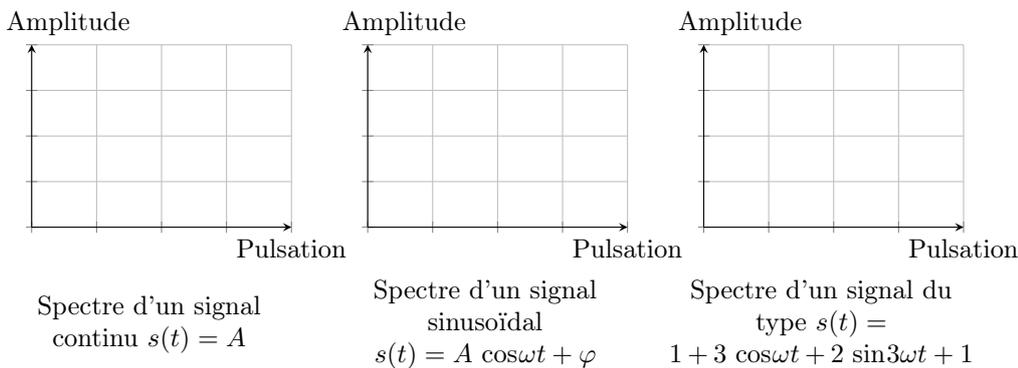
où

- S_0 est la composante continue du signal, c'est-à-dire sa *valeur moyenne* ;
- la composante $S_n \cos n\omega t + \varphi_n$ est l'*harmonique de rang n*, de pulsation $n\omega$ multiple du fondamental ;
- pour $n = 1$, on parle du *fondamental* du signal périodique.
- φ_n sont les déphasages à $t = 0$ pour chaque harmonique de rang n .

Remarque : La valeur efficace suit le théorème de Parseval : $s_{eff}^2 = S_0^2 + \sum_n \frac{S_n^2}{2}$.

- ★ Prendre le temps de rappeler la définition d'une valeur efficace, et de rappeler la définition d'une moyenne. Rappeler la moyenne de $\cos(\omega t + \varphi)$, de $\cos^2(\omega t + \varphi)$, de $\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$.

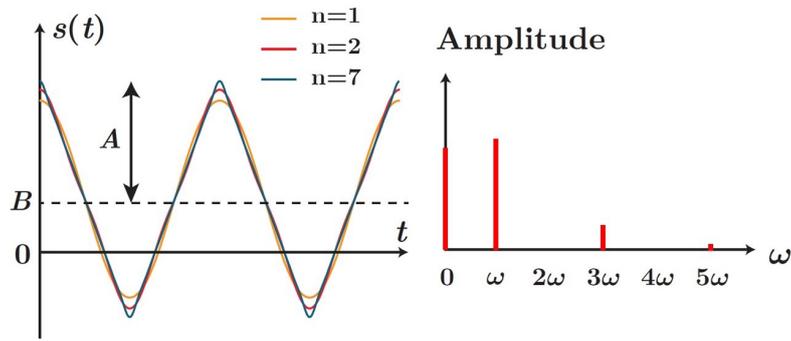
Caractériser un signal périodique revient donc à connaître les amplitudes et déphasages pour les fréquences mises en jeu. On peut le représenter graphiquement pour une meilleure lisibilité : on parle de *spectre en amplitude* (resp. en phase) lorsqu'on représente les valeurs S_n (resp. φ_n) en fonction de la pulsation $\omega_n = n\omega$ (ou tout simplement en fonction de n). Il est nécessairement *discret*. Par exemple :



Donnons désormais la décomposition en série de Fourier de deux exemples de signaux usuels en physique.

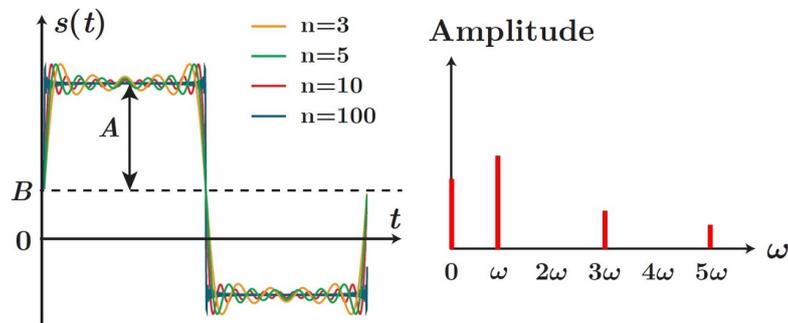
- Signal triangulaire de valeur moyenne B , d'amplitude A et de période $T = 2\pi/\omega$:

$$s(t) = B - \frac{8A}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos(2p+1)\omega t \quad (\text{II.4})$$



- ★ Barrer $2\omega, 4\omega$ sur l'axe des abscisses + dessiner l'allure de la courbe en $\frac{1}{n^2}$
- Signal créneau de valeur moyenne B , d'amplitude A et de période $T = 2\pi/\omega$:

$$s(t) = B + \frac{4A}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin(2p+1)\omega t \quad (\text{II.5})$$



- ★ Barrer $2\omega, 4\omega$ sur l'axe des abscisses + dessiner l'allure de la courbe en $\frac{1}{n}$

Notons que plus le signal présente des variations rapides dans le temps, plus les harmoniques d'ordre n grand sont importantes pour bien décrire le signal.

Retour aux ondes : comment décrire une onde réelle ?

- soit le signal est périodique en temps et en espace (pas beaucoup plus réaliste qu'une OPH, sauf si l'onde est construite à partir d'une onde de taille finie par répétition), on peut décomposer en série de Fourier (décomposition unique) :

$$s(x,t) = \sum_{n,p=0}^{+\infty} S_{n,p} \cos(n\omega t \mp pkx + \varphi_{n,p}) \quad (\text{II.6})$$

Pour que l'onde puisse se propager, chacune de ces OPH doit vérifier la relation de dispersion $pk = \frac{n\omega}{v_\varphi(n\omega)}$. On simplifie alors la somme précédente :

$$s(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \cos\left(n\omega \left(t \mp \frac{x}{v_\varphi(n\omega)}\right) + \varphi_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n \cos\left(n\omega \left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \varphi_n\right)$$

si d'Alembert.

- soit le signal n'est pas périodique, on généralise alors à l'aide de la transformée de Fourier (on admet que l'on peut décomposer, de manière unique, tout signal "fini" quelconque avec une transformée de Fourier) :

$$s(x,t) = \int_{\omega=0}^{+\infty} \int_{k=-\infty}^{+\infty} \tilde{s}(\omega,k) \cos(\omega t - kx + \varphi(\omega,k)) d\omega dk \quad (\text{II.7})$$

À nouveau, pour que ce signal soit une onde qui puisse se propager, on doit avoir $k = \pm \frac{\omega}{v_\varphi(\omega)}$. D'où la simplification :

$$s(x,t) = \int_{\omega=0}^{+\infty} \tilde{s}(\omega) \cos\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{v_\varphi(\omega)}\right) + \varphi(\omega)\right) d\omega$$

$$= \int_{\omega=0}^{+\infty} \tilde{s}(\omega) \cos\left(\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right) + \varphi(\omega)\right) d\omega \quad \text{si équation de d'Alembert}$$

On parle alors de **paquet d'ondes**, notion qui sera développée dans un prochain chapitre.

2ème écriture de la solution générale de l'équation de d'Alembert 1D

La solution générale d'une équation de d'Alembert à 1D est une superposition d'une infinité d'OPH se propageant dans les deux sens à la célérité c : les OPH constituent alors une base des solutions de l'équation de d'Alembert.

II.2 Ondes stationnaires

a Définition générale

Une onde est dite stationnaire si sa fonction d'onde au point M découple les variables temporelles et spatiales :

$$s(M,t) = f(M)g(t) \quad (\text{II.8})$$

soit à une dimension $s(x,t) = f(x)g(t)$. Il n'y a alors **pas de propagation**.

b Ondes stationnaires harmoniques

i) Définition générale

Une onde stationnaire est harmonique (OSH) si sa fonction d'onde est un produit de deux sinusoides :

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + \psi) \cos(kx + \varphi)$$

ii) Résolution de l'équation de d'Alembert par la méthode des variables séparées

Montrons que, si une onde stationnaire est solution de l'équation de d'Alembert, alors cette onde stationnaire est harmonique.

En injectant la forme d'onde stationnaire dans l'équation de d'Alembert à 1D, on aboutit à :

$$f''(x)g(t) = \frac{1}{c^2}f(x)g''(t) \implies \frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{g''(t)}{g(t)} \quad \forall(x,t) \quad (\text{II.9})$$

★

en des points où le produit $f(x)g(t)$ ne s'annule pas. On a donc l'égalité d'une fonction de x avec une fonction du temps, ces deux quantités sont constantes, on se retrouve alors à résoudre deux équations :

$$f''(x) - Kf(x) = 0 \quad (\text{II.10})$$

$$g''(t) - c^2Kg = 0 \quad (\text{II.11})$$

Partant de la seconde équation, on peut éliminer de notre étude les cas $K > 0$ et $K = 0$, car ils impliquent que $g \rightarrow +\infty$ ou $g \rightarrow 0$, ce qui ne sera pas le cadre d'étude de propagation sans perte. Posons alors $K = -k^2 < 0$, on a alors deux équations d'oscillateurs harmoniques :

★

$$f''(x) + k^2f(x) = 0 \implies f(x) = A \cos(kx + \varphi) \quad (\text{II.12})$$

$$g''(t) + k^2c^2g(t) = 0 \implies g(t) = B \cos(\omega t + \Psi) \quad (\text{II.13})$$

en posant $\omega = ck$. Ainsi si l'onde stationnaire $s(x,t)$ est solution de l'équation de d'Alembert, alors elle s'écrit :

$$s(x,t) = s_0 \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \Psi) \quad (\text{II.14})$$

iii) Ventres et nœuds

Par définition :

- les nœuds de l'onde stationnaire sont tels que $s = 0, \forall t$, impliquant

$$\cos(kx + \varphi) = 0 \iff kx + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff x = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad (\text{II.15})$$

c'est-à-dire, en notant $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, que deux nœuds plus proches voisins sont distants de $\lambda/2$;

- les ventres de l'onde stationnaires sont les lieux où l'amplitude de s est maximale $\forall t$:

$$\cos(kx + \varphi) = \pm 1 \iff kx + \varphi = n\pi \iff x = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \quad (\text{II.16})$$

Ainsi deux ventres plus proches voisins sont distants de $\lambda/2$, et un ventre et un nœuds plus proches voisins sont distants de $\lambda/4$.

iv) Relation entre les ondes stationnaires et les ondes progressives

Il existe un lien entre ces deux types de solutions. En effet, une onde stationnaire est la somme de deux ondes progressives contra-propageantes :

$$s_0 \cos(\omega t + \Psi) \cos(kx + \varphi) = \frac{s_0}{2} \left(\cos(\omega t - kx + \Psi - \varphi) + \cos(\omega t + kx + \Psi + \varphi) \right) \quad (\text{II.17})$$

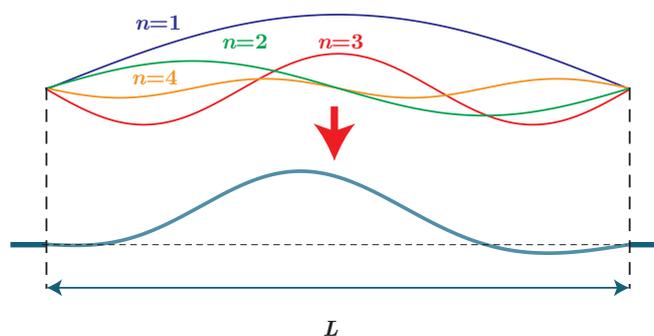
À l'inverse, une onde progressive est la somme de deux ondes stationnaires :

$$s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx) + s_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(kx) \quad (\text{II.18})$$

Ainsi, comme les OPH constituaient une base des solutions de l'équation de d'Alembert, on en déduit que les OSH constituent, elles aussi, une base de l'équation de d'Alembert :

3ème écriture de la solution générale de l'équation de d'Alembert 1D

La solution générale d'une équation de d'Alembert à 1D est une superposition d'une infinité d'OSH vérifiant la relation de dispersion $k = \frac{\omega}{c}$: les OSH constituent alors une base des solutions de l'équation de d'Alembert.



On peut alors se demander quelle base choisir entre les OPH et les OSH, au vu de cette équivalence. Le choix se fait souvent en lien avec la situation physique rencontrée, en particulier les conditions aux limites imposées au système.

III Conséquences des conditions aux limites : exemple de la corde vibrante

III.1 Régime libre

i) Système étudié

Considérons une corde vérifiant une équation de d'Alembert 1D, fixée en ses deux extrémités.

Elle vérifie deux **conditions aux limites** :

$$\forall t, \quad y(0,t) = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$\forall t, \quad y(L,t) = 0 \quad (\text{III.2})$$

★ À $t = 0$, on déforme la corde : on impose alors des **conditions initiales** :

$$y(x,0) = a(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = b(x) \quad (\text{III.3})$$

où a et b sont deux fonctions définies sur $[0; L]$.

ii) Modes propres

Comme les deux CL sont des nœuds de vibration, on va chercher une solution sous forme d'OSH :

$$y(x,t) = C \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{III.4})$$

Appliquons les conditions aux limites :

$$\forall t, \quad y(0,t) = 0 \iff \forall t, \quad C \cos(\omega t + \varphi) \cos(\Psi) = 0 \iff \Psi = \pm \frac{\pi}{2} \quad (\text{III.5})$$

$$\iff y(x,t) = C' \cos(\omega t + \varphi) \sin(kx) \quad (\text{III.6})$$

$$\forall t, \quad y(L,t) = 0 \iff \forall t, \quad C' \cos(\omega t + \varphi) \sin(kL) = 0 \implies \sin(kL) = 0 \quad (\text{III.7})$$

$$\implies kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^* \implies \boxed{k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{N}^*} \quad (\text{III.8})$$

soit avec $\omega = ck$, une valeur de n définit une pulsation associée $\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$, une fréquence $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$, où $f_1 = \frac{c}{2L}$ est le fondamental. Enfin les longueurs d'onde vérifient $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n}$.

Ainsi les seules OSH qui sont compatibles avec les CL ont la forme déterminée ci-dessus : on appelle ces OSH des **modes propres** de la corde vibrante.

Modes propres d'une corde vibrante

Par définition, un **mode propre** est une OSH solution de l'équation de d'Alembert et vérifiant les conditions aux limites.

Pour une corde de longueur L , célérité c maintenue entre ses deux extrémités, les modes propres constituent une base particulière de solutions de l'équation de d'Alembert 1D :

$$y_n(t) = C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) \quad (\text{III.9})$$

Remarque : D'un point de vue pragmatique, si un exercice vous demande de seulement déterminer les fréquences des modes propres, il est beaucoup plus rapide de se baser sur un schéma :

★ Schéma de la corde, détermination de λ_n , et donc de f_n

iii) Solution du problème

La solution générale pour une corde tendue entre ses deux extrémités est donc une combinaison linéaire des modes propres ainsi obtenus :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \sin(k_n x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x) \quad (\text{III.10})$$

On détermine alors les constantes $\{C_n, \varphi_n\}$ ou $\{A_n, B_n\}$ avec les conditions initiales

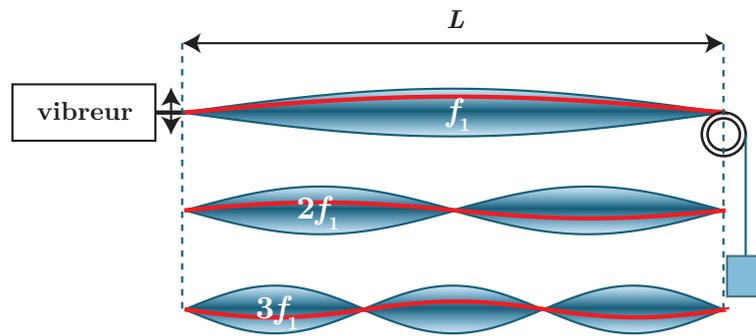
$$y(x,0) = a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(k_n x) \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \omega_n \sin(k_n x) \quad (\text{III.12})$$

c'est-à-dire que les A_n et $B_n \omega_n$ sont les coefficients du développement en série de Fourier de $a(x)$ et $b(x)$.

III.2 Régime forcé

Au lieu d'imposer des conditions initiales à la corde, on peut également imposer une condition aux limites périodique : on peut par exemple attacher l'extrémité $x = 0$ à un vibreur imposant une excitation sinusoïdale à la pulsation ω_0 , tout en laissant l'autre extrémité fixe. Ainsi $y(0,t) = a \cos(\omega_0 t)$ et $y(L,t) = 0, \forall t$. C'est l'expérience de la corde de Melde :



Comme l'une des CL est un nœud de vibration, on cherche une solution sous forme d'onde stationnaire :

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (\text{III.13})$$

★ CL n°1 : en $x = 0$:

$$\forall t \quad s(x=0,t) = a \cos(\omega_0 t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\Psi) \implies \omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \varphi = 0 \quad \text{et} \quad a = A \cos \Psi \quad (\text{III.14})$$

Ainsi, en régime établi, $\omega = \omega_0$: une pulsation a priori inaccessible en régime libre devient possible en régime forcé ! On peut très bien avoir $\omega_0 \neq n\omega_1$!!!

CL n°2 : en $x = L$:

$$0 = A \cos(\omega t) \cos(kL + \Psi) \implies kL + \Psi = \frac{\pi}{2} + n\pi \iff \Psi = \frac{\pi}{2} + n\pi - kL \quad (\text{III.15})$$

D'où :

$$\cos(kx + \Psi) = \cos\left(k(x-L) + n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(k(x-L) + n\pi) = (-1)^n \sin(k(L-x))$$

et de manière similaire $\cos(\Psi) = (-1)^n \sin(kL)$. En réinjectant dans la solution complète :

$$y(x,t) = \frac{a}{\cos(\Psi)} \cos(\omega t) \cos(kx + \Psi) = a \cos(\omega t) \frac{\sin(k(L-x))}{\sin(kL)} \quad (\text{III.16})$$

On observe alors en particulier que pour $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire pour $\omega_0 = n\omega_1$, $y \rightarrow +\infty$: il y a résonance de la corde de Melde pour une pulsation de vibreur égale à la pulsation d'un des modes propres définis précédemment en régime libre. En pratique, à cause des frottements et de la non-linéarité ($\alpha \ll 1$ plus vérifié), l'amplitude ne diverge pas.