
Exercice 1. *Indications et réponses.*

1. a. Récurrence sur n en remarquant que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(\frac{t-1}{7})$.

1. b. Soit $a \neq 1$. On rappelle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + a + \cdots + a^n = \dfrac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

Considérons un réel x quelconque. Posons $x_n = \dfrac{x - (1 + 7 + \cdots + 7^{n-1})}{7^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$x_n = \frac{x}{7^n} - \frac{1}{7^n}\frac{7^n - 1}{6} = \frac{x}{7^n} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6 \cdot 7^n},$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = -\dfrac{1}{6}$. Comme g est continue en $-\dfrac{1}{6}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = g(-\dfrac{1}{6})$ par la caractérisation séquentielle de la continuité. Mais la suite $(g(x_n))$ est constante d'après 1. a. car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(x_n) = g(x)$. On a donc aussi $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = g(x)$ (une suite constante converge ... vers la constante) Donc, par unicité de la limite de la suite convergente $(g(x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, $g(x) = g(-\frac{1}{6})$. Et comme cette égalité est vraie pour n'importe quel réel x, g est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit f une telle fonction. En dérivant deux fois l'égalité, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(7x+1) = f''(x)$ $(*)$. Donc la fonction continue f'' est constante sur $\mathbb{R}$ d'après 1. b. Par conséquent il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$. Et en remplaçant dans l'égalité $(*)$, on doit avoir, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$a(7x+1)^2 + b(7x+1) + c = 49(ax^2 + bx + c),$$

c'est-à-dire $(14a + 7b)x + a + b + c = 49bx + 49c$ ou encore en égalant les coefficients des monômes : $a = 3b$ et $b = 12c$.
Ainsi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c(36x^2 + 12x + 1)$. Enfin on vérifie que les fonctions $x \mapsto c(36x^2 + 12x + 1)$ sont bien solutions (et ce sont donc d'après ce qui précède les seules fonctions solutions).

Exercice 2.

1. D'après le cours, les solutions réelles sur $[0,1]$ de : $y' + y = 0$ sont les applications $x \mapsto Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Utilisons la méthode de la variation de la constante pour déterminer toutes les solutions de E_g.

Soit $y \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. Posons $y(x) = C(x)e^{-x}$, $x \in [0,1]$. Comme $C(x) = y(x)e^x$, $C \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ et on vérifie que y est solution de (E_g) sur $[0,1]$ ssi

$$\forall x \in [0,1],\ C'(x)e^{-x} = g(x)$$

Donc y est solution de (E_g) sur $[0,1]$ ssi $\exists a \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0,1]$, $C(x) = \displaystyle\int_0^x e^t g(t)\,dt + a$ donc ssi

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t(f'(t) + f(t))\,dt + ae^{-x}.$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Remarquons que f est une solution évidente de : $y' + y = f' + f$.
Donc, d'après **1.** avec $g = f' + f$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = e^{-x}\int_0^x e^t(f'(t) + f(t))\,dt + ae^{-x},$$

et $a = 0$ car $f(0) = 0$. Donc $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t(f'(t) + f(t))\,dt$.

3. a. E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$: E est *non vide* car la fonction nulle sur $[0,1]$ appartient à E et E est *stable par combinaison linéaire* puisque pour tous $(f, g) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $af + bg \in E$ car

$$(af + bg)(0) = af(0) + bg(0) = 0.$$

Soit $f \in E$ telle que $n(f) = \|f' + f\|_\infty = 0$. Comme $\|\cdot\|_\infty$ est une *norme* sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $f' + f = \theta$ où θ est la fonction nulle sur $[0,1]$. Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = Ce^{-x}$ et comme $f(0) = 0$, $C = 0$, c'est-à-dire $f = \theta$.

Les autres propriétés de n et de N (homogénéité, inégalité triangulaire) résultent immédiatement des propriétés de la *norme* $\|\cdot\|_\infty$.

3. b. On cherche donc à déterminer deux réels strictement positifs a et b tels que $\forall f \in E$, $an(f) \leq N(f) \leq bn(f)$.

(i) Comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on a immédiatement par inégalité triangulaire : $\forall f \in E$, $n(f) \leq N(f)$.
Donc $a = 1$ convient.

(ii) Soit $f \in E$. D'après **2.**, on a, *pour tout* $x \in [0,1]$:

$$\begin{array}{rcl} |f(x)| & = & e^{-x} \left| \int_0^x e^t (f'(t) + f(t))\, dt \right| \\ & \leq & e^{-x} \int_0^x e^t \underbrace{|f'(t) + f(t)|}_{\leq n(f)} \, dt \\ & \leq & n(f) e^{-x} \underbrace{\int_0^x e^t \, dt}_{= e^x - 1} \\ & \leq & (1 - e^{-x})\, n(f) \leq (1 - \frac{1}{e})\, n(f) \end{array}$$

Donc

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq (1 - \frac{1}{e}) n(f). \tag{1}$$

En remarquant pour finir que $f' = (f' + f) + (-f)$, on obtient avec l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de $\| \cdot \|_\infty$:

$$\begin{array}{rcl} N(f) & = & \|f'\|_\infty + \|f\|_\infty = \|(f' + f) + (-f)\|_\infty + \|f\|_\infty \\ & \leq & \|f' + f\|_\infty + 2\|f\|_\infty \\ & \leq & n(f) + 2(1 - \frac{1}{e})\, n(f) \text{ d'après (1)} \\ & \leq & (3 - \frac{2}{e})\, n(f). \end{array}$$

Donc $b = 3 - \frac{2}{e}$ convient.

Exercice 3.

0. *Rappel sur la fonction* arccos. La restriction de cos à $[0, \pi]$ est une application continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. D'après le théorème de la bijection, cette restriction est une *bijection* de $[0, \pi]$ sur $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$, dont la bijection réciproque est appelée arccos. Ainsi, pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe un unique réel $t \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos t$ et ce réel t s'appelle $\arccos x$.

1. a. La fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, \pi[$ car c'est la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et :

$$\forall t \in]0, \pi[,\ z'(t) = y'(\cos t) \cdot (-\sin t) \text{ et } z''(t) = y''(\cos t) \cdot \sin^2 t - y'(\cos t) \cdot \cos t$$

1. b. y est solution de (E) sur $]-1, 1[$ ssi $\forall x \in]-1, 1[,\ (1 - x^2) y''(x) - x y'(x) + 9 y(x) = 0$
et donc d'après **0.** en effectuant le changement de variable $x = \cos t$ ssi

$$\forall t \in]0, \pi[,\ (1 - \cos^2 t) y''(\cos t) - \cos t \cdot y'(\cos t) + 9 y(\cos t) = 0$$

c'est-à-dire ssi

$$\forall t \in]0, \pi[,\ \sin^2 t \cdot y''(\cos t) - \cos t \cdot y'(\cos t) + 9 y(\cos t) = 0$$

ou encore d'après **1. a.** ssi $\forall t \in]0, \pi[,\ z''(t) + 9 z(t) = 0$.

2. L'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $z''(t) + 9z(t) = 0$, d'inconnue $z \in \mathcal{C}^2(]0, \pi[, \mathbb{R})$, est homogène, du second ordre à coefficients constants. Les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$, associée à $(\mathcal{E})$, sont $-3i$ et $3i$. *D'après le cours*, les solutions z *à valeurs réelles* de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$ sont les fonctions $z : t \mapsto a \cos(3t) + b \sin(3t)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3. a. Soit $u \in \mathbb{R}$. Comme $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$, $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$ et $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \cos(3u) & = & \cos(2u + u) \\ & = & \cos 2u \cos u - \sin 2u \sin u \\ & = & (2\cos^2 u - 1) \cos u - 2 \sin^2 u \cos u \\ & = & (2\cos^2 u - 1) \cos u - 2(1 - \cos^2 u) \cos u \\ & = & 4 \cos^3 u - 3 \cos u \end{array}$$

De même à partir de $\sin 3u = \sin(2u + u) = \sin 2u \cos u + \cos 2u \sin u$, on obtient : $\sin(3u) = 3 \sin u - 4 \sin^3 u$.

3. b. Soit $x \in [-1, 1]$. Par définition de arccos, $\cos(\arccos x) = x$. En outre $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ car

$$\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2$$

et $\sin(\arccos x) \in [0, 1]$ puisque $\arccos x \in [0, \pi]$.
D'où par **3. a.** : $\cos(3 \arccos x) = 4x^3 - 3x$ et $\sin(3 \arccos x) = 3\sqrt{1 - x^2} - 4(\sqrt{1 - x^2})^3 = (4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}$.

4. Par définition de la fonction z associée à y, on a $\forall x \in]-1, 1[,\ y(x) = z(\arccos x)$.
D'après **1. b.**, y est solution de (E) sur $]-1, 1[$ ssi z est solution de $(\mathcal{E})$ sur $]0, \pi[$.
Finalement, d'après **2.** et **3. b.**, y est solution de (E) sur $]-1, 1[$ ssi il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ y(x) = a \cos(3 \arccos x) + b \sin(3 \arccos x) = a(4x^3 - 3x) + b(4x^2 - 1)\sqrt{1 - x^2}.$$

Remarque : L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur $]-1,1[$ de l'équation homogène (E) est bien, conformément au résultat du cours, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 : une base de $\mathcal{S}$, appelée aussi système fondamental de solutions de (E), est la famille (u,v) avec $\forall x \in]-1,1[$, $u(x) = 4x^3 - 3x$ et $v(x) = (4x^2-1)\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 4. *Indications.*

1. I converge par la règle de l'équivalent positif car $\dfrac{1}{1+x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^3}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ converge.

De même J converge par la règle de l'équivalent positif car $\dfrac{x}{1+x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.

Remarque : on pouvait aussi utiliser le principe de comparaison de fonctions positives sur $[1,+\infty[$ *car* $\forall x \geq 1$, $\dfrac{1}{1+x^3} \leq \dfrac{1}{x^3}$ *et* $\dfrac{x}{1+x^3} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

2. Soit $(\varepsilon, X) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\varepsilon < X$. Effectuer le changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$ dans $I(\varepsilon, X) = \displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{dx}{1+x^3}$ puis faire tendre ε vers 0^+ et X vers $+\infty$.

3. *i)* On a : $2I = I + J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^3}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$ car $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$.

ii) Le calcul de $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x+1}$ est classique. Tout d'abord $K = \dfrac{4}{3}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2+1}$ car

$$x^2-x+1 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}(\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1) = \frac{3}{4}((\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}})^2+1).$$

Puis le changement de variable $t = \frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}$ conduit à

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}[\arctan t]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}.$$

D'où $I = \dfrac{1}{2}K = \dfrac{2\pi\sqrt{3}}{9}$.

Exercice 5.

1. Comme f est 1-périodique et continue, $f(\mathbb{R}) = f([0,1]) = [m,M]$ où m (resp. M) est le minimum (resp. le maximum) de f sur $[0,1]$. Donc f est bornée sur $\mathbb{R}$. Considérons $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq C$. Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $|e^{-xt}f(t)| = e^{-xt}|f(t)| \leq Ce^{-xt}$. Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,dt$ converge ($= \frac{1}{x}$) car $x > 0$, donc $I(x)$ converge absolument par comparaison.

2. Effectuer le changement de variable : $u = t-k$ dans $\int_k^{k+1} e^{-xt}f(t)\,dt$ et remarquer que $f(u+k) = f(u)$ car f est 1-périodique et $k \in \mathbb{N}$. Puis avec la relation de Chasles :

$$I(x) = \lim_{n\to+\infty}\int_0^n e^{-xt}f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} e^{-xt}f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-xu}f(u)\,du \cdot \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-x})^k = \int_0^1 e^{-xu}f(u)\,du \cdot \frac{1}{1-e^{-x}}$$

car $e^{-x} \in]0,1[$.

3. a. *i)* Montrons d'abord que :

$$\lim_{x\to0^+}\int_0^1 e^{-xu}f(u)\,du = \int_0^1 f(u)\,du = J$$

en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^1 e^{-x_nu}f(u)\,du = J$ par le théorème de convergence dominée. En effet, posons : $g_n(u) = e^{-x_nu}f(u)$, $u \in [0,1]$. La suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers f car $\forall u \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-x_nu}f(u) = f(u)$ et (hypothèse de domination)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in [0,1],\ |g_n(u)| = e^{-x_nu}|f(u)| \leq |f(u)|$$

sachant que $\displaystyle\int_0^1 |f(u)|\,du$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment).

ii) Par conséquent, si $J \neq 0$, on a :

$$I(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{J}{1-e^{-x}} \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{J}{x},$$

car $e^v - 1 \underset{v\to0}{\sim} v$. Or $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$, donc si $J > 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} I(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{J}{x} = +\infty$ et si $J < 0$, $\lim\limits_{x\to0^+} I(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{J}{x} = -\infty$.

3. b. On commence par intégrer par parties $\int_0^1 e^{-xu}f(u)\,du$:

$$\int_0^1 e^{-xu}f(u)\,du = [e^{-xu}F(u)]_0^1 + x\int_0^1 e^{-xu}F(u)\,du = x\int_0^1 e^{-xu}F(u)\,du$$

car $F(0)=0$ et $F(1)=\int_0^1 f(u)\,du = J = 0$.

En procédant comme dans la question précédente, on montre que $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_0^1 e^{-xu}F(u)\,du = \int_0^1 F(u)\,du$ (par caractérisation séquentielle de la limite en 0^+ et utilisation du théorème de convergence dominée). Sachant que $1-e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} x$, on obtient finalement :

$$\lim_{x\to 0^+} I(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\int_0^1 F(u)\,du}{x} = \int_0^1 F(u)\,du \underset{IPP}{=} -\int_0^1 uf(u)\,du.$$

Partie facultative.

Exercice 6.

1. Posons pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in]0,1[$, $u_n(x)=x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ (à termes positifs) converge par le critère de Riemann car

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n(x) = 0.$$

En effet, comme $\sqrt{n}-1<\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, on a : $0<u_n(x)<x^{\sqrt{n}-1}$ (car $x\in]0,1[$) et donc :

$$0<n^2u_n(x)\leq n^2x^{\sqrt{n}-1}\ (*)$$

Or

$$\ln(n^2x^{\sqrt{n}-1}) = 2\ln(n)+(\sqrt{n}-1)\ln(x) = \sqrt{n}\,(2\frac{\ln n}{\sqrt{n}}+(1-\frac{1}{\sqrt{n}})\ln(x)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(x)\cdot\sqrt{n}$$

car, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}=0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n^2x^{\sqrt{n}-1})=-\infty$ car $\ln(x)<0$ et par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2x^{\sqrt{n}-1} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(n^2x^{\sqrt{n}-1})} = 0^+.$$

L'encadrement $(*)$ ci-dessus permet de conclure par le théorème des gendarmes que l'on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2u_n(x)=0$.

2. Soit $N\in\mathbb{N}^*$. Simplifions $S_N(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N^2+2N} x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$.

Remarquons tout d'abord que $N^2+2N=(N+1)^2-1$. Donc si $n\in[\![0,N^2+2N]\!]$, $0\leq\sqrt{n}<N+1$ et $\lfloor\sqrt{n}\rfloor\in[\![0,N]\!]$.
De plus, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor = p \Leftrightarrow p\leq\sqrt{n}<p+1 \Leftrightarrow p^2\leq n<(p+1)^2 \Leftrightarrow n\in[\![p^2,p^2+2p]\!].$$

Soit $p\in[\![0,N]\!]$. En regroupant les termes $x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ de $S_N(x)$ qui sont égaux à x^p (il y en a $2p+1$), on a donc :

$$S_N(x)=\sum_{p=0}^{N}\sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \sum_{p=0}^{N}\sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} x^p = \sum_{p=0}^{N}(2p+1)x^p.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = \lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{p=0}^{N}(2p+1)x^p = \sum_{p=0}^{+\infty}(2p+1)x^p.$$

Or $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} x^p = \frac{1}{1-x}$ et, en dérivant terme à terme cette somme de série géométrique (série entière de rayon de convergence 1), on obtient :

$$\sum_{p=1}^{+\infty} px^{p-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

et finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} = 2\sum_{p=\cancel{0}1}^{+\infty} px^p + \sum_{p=0}^{+\infty} x^p = 2x\sum_{p=1}^{+\infty} px^{p-1} + \sum_{p=0}^{+\infty} x^p = \frac{2x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x} = \frac{x+1}{(1-x)^2}.$$