Spé PC. Lycée Rabelais. Saint-Brieuc. Durée : 4 heures.
Samedi 23 novembre 2024.

Devoir de mathématiques en temps limité n° 3.

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\,a_{n+1} = (n+\frac{1}{2})a_n$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$.

2. On pose pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2. a. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et vérifier que f est l'une des solutions sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$(1-x)y'(x) - \frac{1}{2}y(x) = 0.$$

2. b. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

2. c. En déduire l'expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Problème 1.

1. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\ dt$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_n = \dfrac{2n}{2n+1} I_{n-1}$.
Indication : intégrer par parties I_n en utilisant : $\sin^{2n+1}(t) = \sin^{2n}(t).\sin(t)$.

1. b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \dfrac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)}$.

2. Déterminer le DSE(0) de la fonction arcsin sur $]-1,1[$.
Indication : considérer la dérivée de la fonction arcsin.

On pose : $\forall x \in]-1,1[$, $\arcsin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$. *On remarquera que a_{2n+1} est positif.*

3. a. Soit $x \in [0,1[$. Prouver que $\forall N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{2n+1} x^{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$.

3. b. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$.

3. c. On note, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = a_{2n+1}x^{2n+1}$.
Prouver que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

3. d. En déduire que la somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ est continue sur $[0,1]$.

3. e. Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

4. a. Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \sin^{2n+1} t$.

4. b. On note, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $v_n(t) = a_{2n+1}\sin^{2n+1} t$.
Prouver que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4. c. Déduire de 4. b. et 1. b. que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. d. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2}$.

Déduire de 4. c. que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2. Soit (E) l'équation différentielle : $x(1-x)y''(x)+(1-3x)y'(x)-y(x)=0$.

1. *Solutions DSE(0) de* (E).

Soit $y(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, $x\in]-R,R[$, où $\displaystyle\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ est une série entière à coefficients réels, de rayon de convergence $R\in]0,+\infty]$.

On note I l'intervalle ouvert $]-R,R[$. Justifier que y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et que y est solution de (E) sur I si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}=a_n.$$

En déduire la valeur de R et montrer que pour tout $x\in]-1,1[$, $y(x)=\dfrac{a_0}{1-x}$.

2. *Résolution de* (E) *sur* $]0,1[$.

D'après **1.** $y_0 : x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$ est une solution de l'équation différentielle (homogène) (E) sur $]0,1[$.

Déterminer toutes les solutions de (E) sur $]0,1[$ en posant : $y(x)=\dfrac{1}{1-x}z(x)$ (Méthode de Lagrange).

Problème 2. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.
On dit que f est une *isométrie* de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$ si et seulement si :

$$\forall(t,t')\in\mathbb{R}^2,\ \|f(t)-f(t')\|=|t-t'|.$$

1. Soient $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$ et f une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$.
Montrer que f est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)$.

2. *Un exemple.* Dans cette question, $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. On rappelle que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\|_\infty=\max(|x|,|y|).$$

Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $t\mapsto(t,\sin t)$. Vérifier que f est une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_\infty)$.

3. Dans cette question, $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ associée au produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$, noté $\langle\,,\,\rangle$.

On rappelle que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\|_2^2=\langle\,(x,y),(x,y)\,\rangle=x^2+y^2.$$

Soit f une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$ telle que $f(0)=(0,0)$.

3. a. Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\|f(x)\|_2=|x|$.

3. b. Soit $(t,t')\in\mathbb{R}^2$. Développer $\|f(t)-f(t')\|_2^2$. En déduire que $\langle f(t),\,f(t')\rangle=tt'$.

3. c. Soit $(t,t')\in\mathbb{R}^2$. Développer $\|f(t+t')-f(t)-f(t')\|_2^2$. Déduire de 3. b. que $f(t+t')=f(t)+f(t')$.

3. d. Démontrer que $\forall(n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}$, $f(nt)=nf(t)$, $\forall q\in\mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{q})=\frac{1}{q}f(1)$ et $\forall(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $f(\frac{p}{q})=\frac{p}{q}f(1)$.

3. e. Prouver que $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=tf(1)$.

Indication : On rappelle que tout réel est la limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$.

4. a. Déterminer toutes les isométries f de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$ telles que $f(0)=(0,0)$.

4. b. Déterminer toutes les isométries de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|_2)$.

Exercice 3. **1.** Soit $(a,b)\in]0,+\infty[^2$ tel que $a<b$. Prouver l'existence de $I(a,b)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt$.

2. Soit $(\varepsilon,X)\in]0,+\infty[^2$ tel que $\varepsilon<X$.

2. a. Vérifier que $\displaystyle\int_\varepsilon^X\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,dt=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}\,du-\int_{aX}^{bX}\frac{e^{-u}}{u}\,du$.

2. b. Prouver que $\forall u\geq 0$, $1-u\leq e^{-u}\leq 1$. En déduire $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{e^{-u}}{u}\,du$.

2. c. Préciser $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_{aX}^{bX}\frac{e^{-u}}{u}\,du$ et déduire de ce qui précède que $I(a,b)=\ln(\frac{b}{a})$.

3. *Application.* Soit $J=\displaystyle\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}\,dx$. Prouver que J existe et déduire de ce qui précède la valeur de J.

Problème 3.

• On note E l'ensemble des fonctions continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx$ converge.

1. *Exemples.*

1. a. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note f_a la fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_a(x) = \dfrac{1}{(1+x)^a}$.

Déterminer les réels a pour lesquels $f_a \in E$.

1. b. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note g_a la fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_a(x) = e^{ax}$.

Déterminer les réels a pour lesquels $g_a \in E$.

1. c. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note h_a la fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ h_a(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)^a}$.

Déterminer les réels a pour lesquels $h_a \in E$.

2. *Quelques propriétés de E.*

2. a. Soit $(f,g) \in E^2$. Prouver que fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, c'est-à-dire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ converge absolument.

2. b. Soit $f \in E$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx = 0$. Prouver que f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

2. c. Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Prouver que $\alpha f + \beta g \in E$.

3. *Etude d'une application T de E dans $\mathbb{R}$.*

• On admet qu'on définit un produit scalaire sur E, noté $\langle\,,\,\rangle$, en posant : $\forall (f,g) \in E^2,\ \langle\, f, g\,\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$,

et on note $\|\cdot\|$ la norme sur E associée à ce produit scalaire : $\forall f \in E,\ \|f\| = \Big(\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}$.

3. a. Soit $u \in E$. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u(x)}{1+x}\,dx$ converge absolument.

• On note T l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall u \in E,\ T(u) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u(x)}{1+x}\,dx$.

3. b. Vérifier que T est une forme linéaire sur E.

3. c. Prouver que T est une application 1-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\,|)$.

3. d. Existe-t-il une constante $k \in]0,1[$ tel que T soit une application k-lipschitzienne de $(E, \|\cdot\|)$ dans $\mathbb{R}$?