Spé PC. Corrigé du devoir de mathématiques en temps limité n^o 3 (23.11.2024).

Exercice 1.

1. La suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs (récurrence immédiate).
Posons $u_n(x) = a_n x^n$, $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \neq 0$ et

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{a_{n+1}}{a_n}|x| = \frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}|x| \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|.$$

D'après le critère de D'Alembert, si $|x| < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge absolument (donc converge) et si $|x| > 1$, $\lim_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$ ce qui implique que $u_n(x) \not\to 0$ et donc que la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ diverge grossièrement. Donc $R = 1$ par propriété du rayon de convergence.

2. a. D'après le cours sur les séries entières, la somme d'une série entière de la variable réelle x, de rayon $R > 0$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et se dérive (indéfiniment) terme à terme sur $]-R, R[$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+\frac{1}{2})a_n x^n = \sum_{n=\cancel{0}1}^{+\infty} n a_n x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = xf'(x) + \frac{1}{2}f(x).$$

Donc f est l'une des solutions sur $]-1, 1[$ de $(E) : (1-x)y'(x) - \frac{1}{2}y(x) = 0$.

2. b. On vérifie que les solutions de l'équation homogène (E) sur $]-1, 1[$ sont les fonctions : $x \mapsto \frac{C}{\sqrt{1-x}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Comme $f(0) = a_0 = 1$, on a donc finalement : $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$.

2. c. On rappelle que $\forall t \in]-1, 1[$, $(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}\, t^n$ $(*)$.

En utilisant $(*)$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $t = -x$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}\,(-1)^n x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!}\, x^n. \end{aligned} \tag{1}$$

Par unicité du DSE(0) d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0, on en déduit donc que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!}.$$

Problème 1.

1. a. et 1. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties l'intégrale I_n :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \sin t\, dt = [\sin^{2n} t.(-\cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2n \sin^{2n-1} t.\cos t.(-\cos t)\, dt \\ &= 2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} t.(1-\sin^2 t)\, dt = 2n(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} t\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt) \\ &= 2n(I_{n-1} - I_n). \end{aligned}$$

Donc $I_n = \dfrac{2n}{2n+1}I_{n-1}$. Comme $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt = [-\cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$, on obtient successivement :

$$I_1 = \frac{2}{3}I_0 = \frac{2}{3},\ I_2 = \frac{4}{5}I_1 = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3},\ I_3 = \frac{6}{7}I_2 = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

et plus généralement, $I_n = \dfrac{2.4\dots(2n)}{3.5\dots(2n+1)}$.

2. *i)* On rappelle que $\forall u \in]-1, 1[$, $(1+u)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!}\, u^n$.

ii) Soit $t \in]-1, 1[$. On a : $\arcsin'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$.
Comme $-t^2 \in]-1, 0]$, en utilisant *i)* avec $u = -t^2$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient que :

$$\begin{aligned} \arcsin'(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}\,(-t^2)^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}\,(-1)^n t^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3\dots(2n-1)}{2^n n!}\, t^{2n}. \end{aligned} \tag{2}$$

Soit $x \in]-1,1[$. D'après le cours sur les séries entières, la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$ s'intègre terme à terme sur tout segment $[a,b] \subset]-R,R[$.

La série entière de la variable t de l'égalité (2), dont la somme est $\arcsin'$ sur $]-1,1[$, a un rayon de convergence égal à 1 (ce dernier résultat pouvant être facilement être vérifié à l'aide du critère de D'Alembert).

On peut ainsi l'intégrer terme à terme sur $[0,x]$ si $x \in [0,1[$ (ou sur $[x,0]$ si $x \in]-1,0]$). Par conséquent, en utilisant l'égalité (2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\arcsin x = \arcsin x - \arcsin 0 &= \int_0^x \arcsin'(t)\,dt = \int_0^x \Big(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} t^{2n}\Big)\,dt \\
&= \int_0^x 1\,dt + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n n!} \int_0^x t^{2n}\,dt \\
&= x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.
\end{aligned}$$

3. a. Posons $a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n+1} = \dfrac{1.3\dots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)}$. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} > 0$.

Soit $x \in [0,1[$. D'après **2.** la série *à termes positifs* $\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$ converge et a pour somme $\arcsin x$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. On a donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{2n+1}x^{2n+1} \leq \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}}_{=\arcsin x}$ d'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{2n+1}x^{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ car $\arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

3. b. Soit $N \in \mathbb{N}$. Faisons tendre x vers 1^- dans l'inégalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{2n+1}x^{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ obtenue en **3. a.** pour $x \in [0,1[$. Comme on a $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{N} a_{2n+1}$ (limite d'une somme de $N+1$ fonctions continues en 1) et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$!, ce passage à la limite donne directement : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$.

Posons $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{2n+1}$. La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est *croissante* car $S_{N+1} - S_N = a_{2N+3}$ et $a_{2N+3} \in \mathbb{R}^+$. Comme elle est majorée par $\dfrac{\pi}{2}$, elle converge. En d'autres termes, on vient de prouver que la série $\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}$ converge.

En outre, la somme de cette série, c'est-à-dire la limite de la suite *croissante* (S_N), est inférieure ou égale à n'importe quel majorant de la suite (S_N). Donc la somme de cette série est inférieure ou égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

Remarque. Cette dernière majoration s'obtient aussi en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ vérifiée pour tout $N \in \mathbb{N}$.

3. c. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ car

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |u_n(x)| = u_n(x) \leq a_{2n+1}$$

et la série $\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}$ converge (cf. **3. b.**).

3. d. La somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[0,1]$ d'après le théorème de continuité du chapitre série de fonctions (CVU et continuité) car toutes les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$ (ce sont des fonctions monômes) et la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0,1]$ (cf. **3. c.**).

3. e. D'après **3. d.**, l'application $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur $[0,1]$. Elle est donc, en particulier, continue (à gauche) en 1 ce qui signifie que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$. Mais, d'après **2.**, on a, pour tout $x \in [0,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \arcsin(x)$.

Donc, comme arcsin est continue (à gauche en 1), on a aussi :

$$\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \lim_{x\to 1^-} \arcsin(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

D'où $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$.

4. a. Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin t \in [0,1[$ et avec **2. b.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}\sin^{2n+1} t = \arcsin(\sin t) = t$.

Pour $t = \dfrac{\pi}{2}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}\sin^{2n+1} t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$ d'après **3. e.** Donc $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}\sin^{2n+1} t = t$.

4. b. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge normalement sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car

$$\forall n \in \mathbb{N},\, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\, |v_n(t)| = v_n(t) \leq a_{2n+1}$$

et la série $\sum_{n\geq 0} a_{2n+1}$ converge (cf. **3. b.**).

4. c. Comme la série de fonctions continues $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge normalement (donc uniformémént) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (cf. **4. b.**), sa somme s'intègre terme à terme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ d'après le théorème d'intégration terme à terme du chapitre séries de fonctions. Ainsi :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{a_{2n+1}\sin^{2n+1} t}_{v_n(t)}\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} I_n.$$

Par conséquent, en utilisant **1. b.** on obtient, après simplifications, que :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{8} &= a_1 I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n n!(2n+1)} \cdot \frac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n+1)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)(2n+1)} \cdot \frac{2.4\ldots(2n)}{3.5\ldots(2n-1)(2n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}
\end{aligned}$$

4. d. Soit $N \in \mathbb{N}$. La somme $\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2}$ peut s'écrire comme une somme de deux sommes, à savoir la somme des inverses des carrés des entiers pairs de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, (2N+1)\}$ et la somme des inverses des carrés des entiers impairs de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, (2N+1)\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} &= \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2}.
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, ce qui donne :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

ou encore $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et finalement $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$ *Remarque : cette somme de série (de Riemann d'exposant 2) est notée $\zeta(2)$.*

Exercice 3.

1. Par propriété de la somme d'une série entière, y est indéfiniment dérivable terme à terme sur $I =]-R, R[$. Donc $y \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$ avec :

$$\forall x \in I,\; y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1},\; y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Donc y est solution de (E) sur I ssi :

$$\forall x \in I,\; \sum_{n=\cancel{2}1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} - \sum_{n=\cancel{2}0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 3\sum_{n=\cancel{1}0}^{+\infty} n a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

ssi :

$$\forall x \in I,\; \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{[n(n-1)+n]}_{=n^2} a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{[n(n-1)+3n+2]}_{=(n+1)^2} a_n x^n = 0$$

ou encore ssi, après changement d'indice dans la première somme ci-dessus,

$$\forall x \in I,\; \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n x^n = 0$$

c'est-à-dire ssi

$$\forall x \in I,\; \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 (a_{n+1} - a_n) x^n = 0.$$

Donc, par unicité du DSE(0) sur $]-R, R[$ de la fonction nulle, y est solution de (E) sur I ssi

$$\forall n \in \mathbb{N},\, (n+1)^2(a_{n+1} - a_n) = 0,$$

c'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0$.
La série entière (géométrique) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$ et le raisonnement *par équivalences* précédent permet de conclure que (E) admet des solutions DSE(0) sur $]-1,1[$, à savoir les fonctions y définies sur $]-1,1[$ par :

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{a_0}{1-x},\ a_0 \in \mathbb{R}.$$

2. La fonction $y_0 : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est une solution sur $]0,1[$ de l'équation *homogène* (E), ne s'annulant pas sur $]0,+\infty[$ d'après 1. Utilisons la méthode de Lagrange avec y_0 afin de déterminer toutes les solutions y de (E) sur $J =]0,1[$, en posant donc, pour tout $x \in J$:

$$y(x) = y_0(x)z(x) = z(x)\cdot\frac{1}{1-x}.$$

Alors z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur J (car $z(x) = y(x)(x-1)$) avec :

$$y'(x) = z'(x)\cdot\frac{1}{1-x} + z(x)\cdot\frac{1}{(1-x)^2},\ y''(x) = z''(x)\cdot\frac{1}{1-x} + 2z'(x)\cdot\frac{1}{1-x} + 2z(x)\frac{1}{(1-x)^3}$$

et, après simplifications, y est solution de (E) sur J ssi pour tout $x \in J$: $xz''(x) + z'(x) = 0$, c'est-à-dire ssi $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in J$, $z'(x) = \dfrac{a}{x}$ ou encore ssi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in J$, $z(x) = a\ln(x) + b$.
En conclusion, y est solution de (E) sur $J =]0,1[$ ssi $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in J$, $y(x) = a\dfrac{\ln(x)}{1-x} + b\dfrac{1}{1-x}$.

Problème 2.

1. f est continue sur $\mathbb{R}$ car f est une application 1-lipschitzienne de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$.

2. Soit $(t,t') \in \mathbb{R}^2$. Rappelons que $\boxed{|\sin t - \sin t'| \leq |t-t'|\ (*)}$: supposons $t < t'$. D'après le théorème des accroissements finis appliqué avec $\sin \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, il existe $t'' \in]t,t'[$ tel que $\sin t - \sin t' = (t-t')\cos t''$. D'où $|\sin t - \sin t'| = |\cos t''||t-t'| \leq |t-t'|$. D'après $(*)$, on a alors :

$$\|f(t) - f(t')\|_\infty = \|(t,\sin t) - (t',\sin t')\|_\infty = \|(t-t', \sin t - \sin t')\|_\infty = \max(|t-t'|, |\sin t - \sin t'|) = |t-t'|.$$

Donc f est une isométrie de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

3. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f est une isométrie de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ et $f(0) = (0,0)$, on a :

$$\|f(x)\|_2 = \|f(x) - (0,0)\|_2 = \|f(x) - f(0)\|_2 = |x-0| = |x|.$$

3. b. Soit $(t,t') \in \mathbb{R}^2$. On a : $\|f(t) - f(t')\|_2^2 = \|f(t)\|_2^2 + \|f(t')\|_2^2 - 2\langle f(t), f(t')\rangle$. Donc d'après 3. a :

$$\|f(t) - f(t')\|_2^2 = t^2 + t'^2 - 2\langle f(t), f(t')\rangle$$

Comme f est une isométrie de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ on a aussi :

$$\|f(t) - f(t')\|_2^2 = |t-t'|^2 = (t-t')^2 = t^2 + t'^2 - 2tt'.$$

En comparant les deux expressions de $\|f(t) - f(t')\|_2^2$ obtenues ci-dessus, on obtient $\langle f(t), f(t')\rangle = tt'$.

3. c. Soit $(t,t') \in \mathbb{R}^2$. On a, en développant et en utilisant 3. a et 3. b :

$$\begin{aligned}
\|f(t+t') - f(t) - f(t')\|_2^2 &= \|f(t+t')\|_2^2 + \|f(t)\|_2^2 + \|f(t')\|_2^2 - 2\langle f(t+t'), f(t)\rangle - 2\langle f(t+t'), f(t')\rangle + 2\langle f(t), f(t')\rangle \\
&= (t+t')^2 + t^2 + t'^2 - 2(t+t')t - 2(t+t')t' + 2tt' \\
&= t^2 + t'^2 + 2tt' + t^2 + t'^2 - 2t^2 - 2tt' - 2tt' - 2t'^2 + 2tt' = 0
\end{aligned}$$

Donc, comme $\|\cdot\|_2$ est une norme, $f(t+t') - f(t) - f(t') = (0,0)$, c'est-à-dire $\boxed{f(t+t') = f(t) + f(t')}$.

3. d. (i) Soit $t \in \mathbb{R}$ quelconque. On montre par récurrence sur n en utilisant 3. c. que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(nt) = nf(t)$.
(ii) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. D'après (i) avec $n = q$ et $t = \frac{1}{q}$, $f(1) = f(q\cdot\frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$ d'où $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}f(1)$.
(iii) Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. D'après (i) et (ii), on a : $f(\frac{p}{q}) = f(p\cdot\frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$.

3. e. Remarquons tout d'abord que, d'après 3. c, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(-t) + f(t) = f(0) = (0,0)$, c'est-à-dire que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(-t) = f(t)\ (**)$$

On a montré en 3. d que $\forall r \in \mathbb{Q}^+$, $f(r) = rf(1)$. D'après $(**)$, on a donc plus précisement

$$\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = rf(1)\ (***)$$

car si $r \in \mathbb{Q}^-$, $-r \in \mathbb{Q}^+$ et $f(r) = f(-(-r)) = -f(-r) = -(-r)f(1) = rf(1)$. Considérons maintenant $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite (r_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $x = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} r_n$. Comme f est continue en x, on a alors en utilisant $(***)$:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) = \lim_{n\to+\infty} r_n f(1) = xf(1).$$

4. a. Soit f une isométrie de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ telle que $f(0) = (0,0)$. On a $\|f(1)\|_2 = |1| = 1$. D'après 3. e. il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a^2 + b^2 = 1$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(a,b) = (ax, bx)$ (en posant $f(1) = (a,b)$). On peut aussi conclure de la façon suivante : il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (\cos(\theta)\,x, \sin(\theta)\,x)$ (en posant $f(1) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

4. b. Soit f une isométrie de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. L'application g définie par : $g(x) = f(x) - f(0)$, $x \in \mathbb{R}$, est une isométrie de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ (vérification facile) telle que $g(0) = (0,0)$. Donc d'après 4. a. il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^2$ ($v = f(0)$) tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (\cos(\theta)\,x, \sin(\theta)\,x) + v$.

Exercice 4.

1. Posons pour tout $t \in]0,+\infty[$, $f_{a,b}(t) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$. La fonction $f_{a,b}$ est continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$.

i) Existence de $I_1(a,b) = \displaystyle\int_0^1 f_{a,b}(t)\,dt$. Comme $e^u = 1 + u + o_0(u)$, $e^{-at} - e^{-bt} = (b-a)t + o_0(t)$, et

$$f_{a,b}(t) = (b-a) + \varepsilon(t)$$

avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$. Donc $\lim\limits_{t\to 0^+} f_{a,b}(t) = b - a$ et $I_1(a,b)$ existe car $f_{a,b}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f_{a,b}(0) = b - a$.

ii) Existence de $I_2(a,b) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_{a,b}(t)\,dt$. $I_2(a,b)$ converge par le critère de Riemann en $+\infty$ car, par croissances comparées,

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 f_{a,b}(t) = \lim_{t\to+\infty} (te^{-at} - te^{-bt}) = 0.$$

Donc $I(a,b)$ existe.

2. a. Tout d'abord par linéarité de l'intégrale : $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt = \int_\varepsilon^X \frac{e^{-at}}{t}\,dt - \int_\varepsilon^X \frac{e^{-bt}}{t}\,dt$. En effectuant le changement de variable $u = at$ dans $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-at}}{t}\,dt$, on obtient $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-at}}{t}\,dt = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-u}}{u}\,du$. De même en effectuant le changement de variable $u = bt$ dans $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-bt}}{t}\,dt$, on obtient $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-bt}}{t}\,dt = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du$. Donc

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du$$

puis, en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-bt}}{t}\,dt = (\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-u}}{u}\,du) - (\int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-u}}{u}\,du + \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du) = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

2. b. *i)* Tout d'abord, pour tout $u \geq 0$, $-u \leq 0$ et par croissance de l'exponentielle, $e^{-u} \leq e^0 = 1$. Posons $d(u) = e^{-u} - (1-u)$: d est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, avec pour tout $u \geq 0$ $d'(u) = 1 - e^{-u} \geq 0$. Donc d est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En particulier pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, $d(u) \geq d(0) = 0$, c'est-à-dire $e^{-u} \geq 1 - u$.

ii) D'après *i)* pour tout $u > 0$, $\dfrac{1}{u} - 1 \leq \dfrac{e^{-u}}{u} \leq \dfrac{1}{u}$ et comme $0 < a\varepsilon \leq b\varepsilon$, on a, par propriété de l'intégrale :

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} (\frac{1}{u} - 1)\,du \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{du}{u},$$

c'est-à-dire

$$\ln(\frac{b}{a}) - (b-a)\varepsilon \leq \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leq \ln(\frac{b}{a})$$

et par le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \ln(\frac{b}{a})$ car $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(\frac{b}{a}) - (b-a)\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln(\frac{b}{a}) = \ln(\frac{b}{a})$.

2. c. Pour tout $u \in [aX, bX]$, $e^{-bX} \leq e^{-u} \leq e^{-aX}$. Comme $0 < aX \leq bX$, on a, par propriété de l'intégrale :

$$\int_{aX}^{bX} \frac{e^{-bX}}{u}\,du \leq \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leq \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-aX}}{u}\,du,$$

c'est-à-dire

$$e^{-bX} \ln(\frac{b}{a}) \leq \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du \leq e^{-aX} \ln(\frac{b}{a})$$

et par le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du = 0$ car $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} e^{-aX} \ln(\frac{b}{a}) = \lim_{X\to+\infty} e^{-bX} \ln(\frac{b}{a}) = 0$.

En conclusion d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \lim_{\varepsilon\to 0^+,\, X\to+\infty} \int_\varepsilon^X \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0^+,\, X\to+\infty} (\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,du - \lim_{X\to+\infty} \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-u}}{u}\,du = \ln(\frac{b}{a}) - 0 = \ln(\frac{b}{a}). \end{aligned}$$

3. *i) Existence de J.* Posons pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = \dfrac{x-1}{\ln x}$. On constate que g, continue sur $]0,1[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$ car $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\ln x} = 0^+$ et prolongeable par continuité en 1 en posant $g(1) = 1$ car $\ln x \underset{x\to 1}{\sim} x - 1$. Donc J existe.

ii) Calcul de J. Soit $(\varepsilon, X) \in]0,1[^2$ tel que $\varepsilon < X$. Effectuons le changement de variable $x = e^{-t}$, c'est-à-dire $t = -\ln x$ dans $J(\varepsilon, X) = \displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{x-1}{\ln x}\,dx$. On obtient : $J(\varepsilon, X) = \displaystyle\int_{-\ln X}^{-\ln\varepsilon} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,dt$ et finalement d'après **2. c.** :

$$J = \lim_{\varepsilon\to 0^+,\, X\to 1^-} J(\varepsilon, X) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}\,dt = I(1,2) = \ln 2.$$