Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n^o 10

Exercice 1. Justifier que dans un village de 700 habitants, au moins deux personnes ont les mêmes initiales (formées de la première lettre du prénom et la première lettre du nom).

Exercice 2. Dans un lycée de 1200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument de musique et 453 ne font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves à la fois sportifs et musiciens.

Exercice 3. Soit E un ensemble à n éléments. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{A \subset E} \text{card}(A)$.

Exercice 4. On lance quatre fois un dé et on appelle « tirage » la liste des 4 entiers obtenus successivement.

1. Combien de tirages possibles ?

2. Combien de tirages comportant exactement deux entiers différents ?

Exercice 5. On constitue un groupe de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes.
1. Combien y a-t-il de groupes possibles ?
2. Même question si le groupe comporte 4 hommes et 4 femmes, puis si le groupe compte au moins 2 femmes.

Exercice 6. Combien de «mains» de treize cartes peut-on constituer avec un jeu de 52 cartes si :
a) Elles contiennent les 4 as ? b) Elles contiennent exactement un roi ? c) Elles contiennent le roi de trèfle et exactement 4 piques ?

Exercice 7. De combien de façons peut-on ranger sur une étagère 5 livres de physique, 4 livres de mathématiques et trois livres de chimie de sorte que les livres restent groupés par matière ?

Exercice 8. Les anagrammes d'un mot sont les mots (ayant un sens ou non) que l'on obtient en modifiant l'ordre des lettres. Combien y-a-t-il d'anagrammes des mots : a) debout b) baobab c) tennessee d) anagramme ?

Exercice 9. Une association sportive compte dix coureurs de 100 mètres.
1. Combien peut-on former d'équipes de relais de 4×100 mètres ? L'ordre dans lequel les coureurs participent est à prendre en considération.
2. Soit A l'un de ces dix coureurs. Combien d'équipes de relais contiennent A ?
3. Soit B un autre des dix coureurs. Combien d'équipes de relais contiennent A ou B ?

Exercice 10. De combien de façons peuvent s'assoir n garçons et n filles à une table ronde en respectant l'alternance fille-garçon ?

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux ensembles disjoints ayant chacun n éléments. Démontrer, en calculant de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments de $A \cup B$ que : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 12. `[Formule de Vandermonde]` Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $n \in \{0, \ldots, p+q\}$. Proposer une démonstration par dénombrement de l'égalité : $\displaystyle\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

Exercice 13. Dénombrer les surjections d'un ensemble à n éléments dans (sur) un ensemble à deux éléments.

Exercice 14. Soit E un ensemble à n éléments. Dénombrer les couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$.

Exercice 15. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \subset E$ telle que $\text{card}(A) = p$.
1. Combien de parties X de E contenant A ?
2. Soit $m \in \{p, \ldots, n\}$. Combien de parties X de E telles que $A \subset X$ et $\text{card}(X) = m$?
3. Combien de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = A$?

Exercice 16. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$.

1. Soit $M \in \{p+1, \cdots, n+1\}$. Combien y-a-t-il de parties à $p+1$ éléments de $\{1, \cdots, n+1\}$ dont le plus grand élément est M ?

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

3. Soit $k \in \{p, \cdots, n\}$. Quel coefficient binomial est égal à $\displaystyle\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$? Retrouver le résultat de **2.**

Exercice 17. Soit E_n l'ensemble des n-uplets constitués de 0 ou de 1, n'ayant pas deux zéros consécutifs. On note $c_n = \text{card}(E_n)$.

1. Calculer c_1, c_2 et c_3.

2. Soit $n \geq 3$.
2. a. Vérifier qu'il y a c_{n-1} suites de E_n dont le premier terme est égal à 1.
2. b. Prouver que $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$.
2. c. Calculer c_n en fonction de n.

Exercice 18. **1.** Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Montrer qu'il y autant d'applications strictement croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ que de parties à p éléments de $\{1, \cdots, n\}$.
2. a. Soit f une application croissante de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$. Soit g définie par : $\forall k \in \{1, \cdots, p\}$, $g(k) = f(k) + k - 1$.

Vérifier que g est strictement croissante.
2. b. Dénombrer les applications croissantes de $\{1, \cdots, p\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$.

Exercice 19. **1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dénombrer les surjections de l'ensemble $\{1, \ldots, n+1\}$ sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ telles que i a exactement deux antécédents.

2. En déduire qu'il y a $n \cdot \dfrac{(n+1)!}{2}$ surjections de l'ensemble $\{1, \ldots, n+1\}$ sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice 20. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble à n éléments.

1. Soit f une application de E dans E. On rappelle qu'un élément y de E appartient à l'image de f, notée Im f, si et seulement si il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Vérifier que $f \circ f = f$ si et seulement si $\forall y \in \text{Im } f$, $f(y) = y$.

2. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et A une partie de E ayant k éléments. Montrer qu'il y a k^{n-k} applications f de E dans E telles que Im $f = A$ et $f \circ f = f$.

3. Montrer qu'il y a finalement $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}$ applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$.

Indications et/ou corrigés.

Exercice 3. *Méthode n^o 1 :* Calculer S_n en justifiant que $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Méthode n^o 2 : Justifier que $S_n = \sum_{A \subset E} \mathrm{card}(\bar{A})$ et considérer $2S_n$.

Exercice 4. 1. Un tirage s'identifie à une 4-liste de $[\![1,6]\!]$ d'où $6^4 = 1296$ tirages.
2. Dénombrer les tirages avec trois fois le même numéro et un numéro différent et les tirages avec deux fois deux numéros identiques. Réponse : 120+90=210.

Exercice 8. Il y a 30240 anagrammes du mot anagramme.

Exercice 10. Combien de façons de choisir *l'ensemble* des n places que les garçons occuperont ? Une fois ce choix effectué, combien de façons d'y placer les n garçons ?

Exercice 13. Combien d'applications *non surjectives* d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à deux éléments ?

Exercice 17. 2. a. et b. Soient $E_{n,0}$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ de E_n tels que $x_1 = 0$ et $E_{n,1}$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ de E_n tels que $x_1 = 1$. Clairement E_n est l'union des deux ensembles disjoints $E_{n,0}$ et $E_{n,1}$.
Remarquer alors que :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in E_{n,0} \Leftrightarrow (x_3, \ldots, x_n) \in E_{n-2} \text{ car } \ x_2 = 1 \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in E_{n,1} \Leftrightarrow (x_2, \ldots, x_n) \in E_{n-1}.$$

d'où $\mathrm{card}(E_{n,0}) = \mathrm{card}(E_{n-2})$ et $\mathrm{card}(E_{n,1}) = \mathrm{card}(E_{n-1})$.

Exercice 20. 1. Pas compliqué ! Montrons la double implication :
i) Supposons $f \circ f = f$ $(*)$. Soit $y \in \mathrm{Im}\ f$. Soit $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a bien : $f(y) = f(f(x)) = \underbrace{f \circ f\,(x) = f(x)}_{(*)} = y$.

ii) Supposons que pour tout $y \in \mathrm{Im}\ f$, $f(y) = y$ $(**)$. Prouver que $f \circ f = f$, c'est prouver que <u>pour tout $x \in E$, $f \circ f\,(x) = f(x)$</u>. Considérons un élément quelconque x de E et notons $y = f(x)$ son image par f. Evidemment $y \in \mathrm{Im}\ f$. On a donc d'après $(**)$, $f(y) = y$, c'est-à-dire $f(f(x)) = f(x)$ ou encore $f \circ f(x) = f(x)$.

2. Une application de E dans E vérifiant $f \circ f = f$ telle que $\mathrm{Im}\ f = A$ est une application de E dans E telle que <u>$\forall x \in A,\ f(x) = x$</u> d'après **1.** et telle que $\forall x \notin A$, $f(x) \in A$ (puisque $\mathrm{Im}\ f = A$). Donc quand on « construit » une telle application, on ne s'intéresse qu'aux images des éléments de $E \setminus A$, sachant que ces images doivent être des éléments de A. Par conséquent il y en a autant de telles applications que d'applications de $E \setminus A$ dans A, c'est-à-dire k^{n-k} (le nombre de façons de choisir les images des éléments de $E \setminus A$) car $\mathrm{card}(E \setminus A) = n - k$.

3. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}\ f) = k$. Les ensembles $\mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_n$ forment une partition de $\mathcal{P}$, et on a donc : $\mathrm{card}(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{card}(\mathcal{P}_k)$.
Or $\mathrm{card}(\mathcal{P}_k) = \binom{n}{k} k^{n-k}$: en effet, il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une partie A de E ayant k éléments (jouant le rôle de Im f !) et d'après **2.** k^{n-k} applications de E dans E vérifiant $f \circ f = f$ telle que $\mathrm{Im}\ f = A$. Donc par principe multiplicatif, il y a bien $\binom{n}{k} k^{n-k}$ applications de E dans E vérifiant $f \circ f = f$ telles que $\mathrm{card}(\mathrm{Im}\ f) = k$. D'où l'égalité demandée.