Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 11.

Exercice 1. Une urne contient 5 boules blanches et 2 boules noires.
1. On tire trois boules de cette urne, sans remise.
a) Combien de résultats possibles ? b) Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ? c) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules blanches ? d) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule blanche ?

2. Mêmes questions a), b), c), d) lorsqu'on remet dans l'urne la boule sortie après chaque tirage.

Exercice 2. Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1)$.

Exercice 3. On lance deux dés qui ont la même distribution de probabilités. Montrer que la probabilité d'obtenir deux fois le même chiffre est toujours supérieure ou égale à $\frac{1}{6}$.

Exercice 4. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules de l'urne.

1. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Calculer la probabilité de l'événement A_k : « obtenir k boules rouges parmi les n boules tirées».

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 5. Une urne U_1 (resp. U_2) contient 3 boules blanches (resp. 2 boules blanches et 1 boule noire). On choisit de manière équiprobable une de ces deux urnes, et on effectue deux tirages successifs sans remise dans l'urne choisie. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que le premier tirage a donné une boule blanche.

Exercice 6. On lance succcessivement n pièces de monnaie. La probabilité que la k-ième pièce lancée ($k \in [\![1, n]\!]$) donne pile est $\frac{1}{2k+1}$.

On note P_k l'évènement : « on a obtenu un pile lors du k-ième lancer », S_i l'évènement : « on a obtenu un nombre pair de pile(s) lors des i premiers lancers» et $u_i = P(S_i)$.

1. Calculer u_1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $(2i+3)u_{i+1} - (2i+1)u_i = 1$.

2. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair de piles lors des n lancers.

Exercice 7. Un gardien doit ouvrir une porte. Il possède un trousseau de six clés différentes. Quand il est fatigué, il remélange les clés après chaque essai ; sinon il retire la mauvaise clé du lot et recommence. Sachant qu'il est fatigué un jour sur quatre et qu'en ce jour il a essayé au moins cinq clés, quelle est la probabilité qu'il soit fatigué ?

Exercice 8. X et Y s'entraînent au tir à l'arc. X atteint la cible 9 fois sur 10, Y atteint la cible 6 fois sur 10 et joue deux fois sur 3. Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ? L'un des joueurs a atteint la cible. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de Y ?

Exercice 9. Dans une population, la probabilité p_n qu'une famille ait n enfants est donnée par la formule $p_n = a\frac{2^n}{n!}$ avec $a > 0$.

1. Déterminer la valeur de a.

On suppose qu'il est équiprobable qu'un enfant soit une fille ou un garçon.

2. Calculer la probabilité qu'une famille ait au moins un garçon.

3. On suppose qu'une famille a exactement un garçon. Quelle est la probabilité que la famille comporte deux enfants ?

Exercice 10. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement deux boules de l'urne. Calculer la probabilité que la deuxième boule tirée ait un numéro supérieur ou égal à celui de la première boule tirée si :
1. le tirage se fait avec remise de la première boule tirée, **2.** le tirage se fait sans remise de la première boule tirée.

Exercice 11. On dispose de $(N+1)$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $(N-k)$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on y prélève des boules avec remise après chaque tirage.
1. Quelle est la probabilité $p_{N,n}$ que les n premiers tirages soient n boules blanches ? Préciser $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} p_{N,n}$.

2. Sachant que les n premiers tirages ont donné n boules blanches, quelle est la probabilité (conditionnelle) $q_{N,n}$ qu'un tirage supplémentaire donne encore une boule blanche ? Préciser $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} q_{N,n}$.

Exercice 12. On lance une infinité de fois un dé équilibré à 5 faces, numérotées de 1 à 5.

On note p_n la probabilité que la somme des résultats obtenus lors des n premiers lancers soit paire.

1. Calculer p_1.

2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

3. En déduire p_n et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} p_n$.

Exercice 13. Un atelier reçoit 5000 pièces : 1000 en provenance de l'usine A et 4000 en provenance de l'usine B. Dix pour cent des pièces fabriquées par l'usine A et cinq pour cent de celles fabriquées par l'usine B sont défectueuses.
1. On choisit au hasard une pièce à l'atelier. Quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?
2. Sachant que la pièce choisie est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'usine A ?

Exercice 14. Une population possède une proportion $p \in]0, 1[$ de tricheurs. Lorque l'on fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un tricheur, il retourne à coup sûr un as. Exprimer en fonction de p la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population retourne un as.

Exercice 15. Soient $A_1, \dots, A_n$ n événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Montrer que $P(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}) \leq \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)$.

Exercice 16. Soit n un entier supérieur au égal à 2. On lance n fois une pièce de monnaie équilibrée. Montrer qu'il existe une valeur de n pour laquelle les évènements "on obtient Face au plus une fois" et "on obtient Face et Pile au moins une fois" sont indépendants.

Exercice 17. Soient X un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et A une partie donnée de X de cardinal k. On sélectionne au hasard une partie B (éventuellement vide !) de X Les événements $(B \subset A)$ et $(A \subset B)$ sont-ils indépendants ?

Exercice 18. On considère deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient r_1 boules rouges et v_1 boules vertes. L'urne U_2 contient r_2 boules rouges et v_2 boules vertes. On lance un dé non truqué. S'il donne le chiffre 1, on choisit l'urne U_1, sinon on choisit l'urne U_2. Dans chaque cas on effectue deux tirages avec remise dans l'urne choisie. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge au premier tirage ? deux boules rouges en tout ?
Exercice 19. **1.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$, prouver que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.
2. Deux personnes lancent n fois chacune une pièce non truquée. Quelle est la probabilité qu'elles obtiennent le même nombre de faces ?

Exercice 20. Deux archers A_1 et A_2 disputent un tournoi. Ils tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un d'eux la touche et gagne alors le tournoi. L'archer A_1 tire en premier. Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on note $p_i \in]0, 1[$ la probabilité que A_i touche la cible.

Les résultats des tirs sont supposés indépendants. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note G_i l'événement : « A_i gagne le tournoi ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité que A_1 gagne lors du $2n + 1$-ième tir, et que A_2 gagne lors du $2n + 2$-ième tir.

2. En déduire $P(G_1)$, $P(G_2)$, puis la probabilité que le jeu dure indéfiniment.

Exercice 21. Un joueur lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. On note $p \in]0, 1[$ la probabilité d'obtenir pile lors de chaque lancer. S'il lui a fallu n lancers pour obtenir pile, on lui fait tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant. Calculer la probabilité que le joueur gagne.

Exercice 22. On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue une succession de tirages de la façon suivante :

- On choisit une urne au hasard. On tire une boule dans l'urne choisie, on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

- Si la boule tirée est blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon il se fait dans l'urne U_2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note B_n l'événement «la boule tirée lors du n-ième tirage est blanche». On note $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.

2. En déduire la valeur de p_n en fonction de n et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 23. On étudie le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

i) Si l'appareil fonctionne à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il a la probabilité $a \in]0, 1[$ d'être en panne à l'instant $n + 1$,
ii) Si l'appareil est en panne à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), il a la probabilité $b \in]0, 1[$ d'être en panne à l'instant $n + 1$.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Etablir que $p_{n+1} = (b - a)p_n + 1 - b$.

2. Calculer p_n en fonction de n et p_0 puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 24. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

2. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ? *On rappelle que* $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$.

3. Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Exercice 25. La probabilité d'obtenir «face» avec la pièce A (resp. la pièce B) est égale à $\frac{1}{2}$ (resp. $\frac{1}{3}$).
On choisit une des deux pièces au hasard. On la lance. Si on obtient «face», on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On effectue ainsi une série de lancers. Quelle est la probabilité d'obtenir «face» au n^e lancer ?

Exercice 26. *Premier lemme de Borel-Cantelli.*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(A_n)$ converge.

Soit B l'événement : " Les événements A_n sont réalisés pour une infinité d'indices n".

1. Vérifier que $B = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$.

2. Soit $B_n = \bigcup\limits_{k\geq n} A_k$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$.

3. En déduire que $P(B) = 0$.

Exercice 27. *Second lemme de Borel-Cantelli.*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $\sum\limits_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge.

Soit B l'événement : " Les événements A_n sont réalisés pour une infinité d'indices n".

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq e^{-x}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{p\to+\infty} P(\bigcap\limits_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}) = 0$.

3. Déduire de 2. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\bigcup\limits_{k=n}^{+\infty} A_k) = 1$ et prouver finalement que $P(B) = 1$.