

1 Ensemble fini

1.1 Rappels de quelques notions ensemblistes

Soit E un ensemble. L'ensemble des parties (ou sous-ensembles) de E est noté $\mathcal{P}(E)$. Soient A et B deux parties de E . On définit : $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$ (« A union B »), $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$ (« A inter B »), $E \setminus A = \bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$ (le complémentaire de A dans E). On dit que A et B sont disjointes si $A \cap B = \emptyset$ et qu'une famille de parties *non vides et deux à deux disjointes* $A_1, \dots, A_n$ de E est une partition de E si $E = A_1 \cup \dots \cup A_n$. Le produit cartésien $E \times F$ de deux ensembles E et F est l'ensemble des couples formés d'un élément de E et d'un élément de F : $E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ et } y \in F\}$.

1.2 Cardinal d'un ensemble fini

Intuitivement un ensemble non vide est *fini* si on peut lui associer un entier naturel n obtenu en comptant ses éléments. Plus précisément :

Définition 1 *Un ensemble non vide E est fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $\{1, \dots, n\}$. Dans ce cas, n est unique : n est le nombre d'éléments de E ou encore le cardinal de E . On le note $\text{card}(E)$ ou $|E|$. Par convention, l'ensemble vide est de cardinal 0.*

Remarque 1 *Il en résulte que deux ensembles finis en bijection ont même cardinal. On dit qu'ils sont équipotents. Pour déterminer le cardinal d'un ensemble fini A , il suffit donc de trouver un ensemble fini B de cardinal connu et une bijection de A sur B ou de B sur A . On a alors $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.*

On regroupe dans la proposition suivante quelques propriétés élémentaires :

Proposition 1 *Soient $A, B, A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis.*

1. *Si $A \subset B$, alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$ avec égalité si $A = B$.*
2. [Union disjointe] *Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$ et plus généralement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, alors $\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k)$.*
3. [Complémentaire] *Si $A \subset B$, $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A)$.*
4. [Union quelconque] $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
5. [Produit cartésien] $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \text{card}(B)$. Plus généralement, $\text{card}(A_1 \times \dots \times A_n) = \prod_{k=1}^n \text{card}(A_k)$ et en particulier, si $p \in \mathbb{N}^*$, $\text{card}(A^p) = \text{card}(A)^p$ où $A^p = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{p \text{ fois}}$.
6. *Soient E et F deux ensembles finis ayant le même cardinal. Une application f de E dans F est bijective si et seulement si f est injective, si et seulement si f est surjective.*

Preuve. 5. Soient $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ de cardinal $m \in \mathbb{N}^*$, et $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$A \times B = \underbrace{\{(a_1, b_1), \dots, (a_1, b_n)\}}_{n \text{ couples}}, \dots, \underbrace{\{(a_m, b_1), \dots, (a_m, b_n)\}}_{n \text{ couples}}$$

est bien un ensemble comportant mn couples distincts. □

2 Dénombrement d'applications

Proposition 2 [Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre] *Soient E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble fini de cardinal n . Il y a $n^p = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$ applications de E dans F .*

Preuve. Posons $E = \{a_1, \dots, a_p\}$. Une application f de E dans F est caractérisée par la donnée du p -uplet $(f(a_1), \dots, f(a_p))$ de F . Le nombre d'applications de E dans F est donc égal au nombre de p -uplets de F , c'est-à-dire au cardinal de F^p . Ce cardinal est n^p d'après la proposition 1 5). $\square$

Exemple 1. Sept personnes montent dans une rame de métro comportant cinq voitures. Dénombrer les différentes répartitions possibles des personnes dans les voitures.

Définition 2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une p -liste (ou p -uplet) d'éléments de F est un élément $(x_1, \dots, x_p)$ de F^p .

Remarque 2 Une p -liste x de F peut s'identifier à l'application f de $\{1, \dots, p\}$ dans F telle que : $f(1) = x_1, \dots, f(p) = x_p$. On retrouve ainsi qu'il y a n^p p -listes de F si $\text{card}(F) = n$.

Proposition 3 [Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un autre] Soient E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble fini de cardinal $n \geq p$. Il y a $n(n-1) \cdots (n-(p-1))$ injections de E dans F .

Preuve. Pour construire une telle injection, on choisit $x_1 \in F$ (n choix possibles), puis x_1 étant choisi, on choisit x_2 dans $F \setminus \{x_1\}$ ($n-1$ choix possibles) etc. D'où le résultat par le principe de la multiplication des choix. $\square$

Remarque 3 Il n'y a évidemment aucune injection de E dans F si $\text{card}(F) < \text{card}(E)$.

Exemple 2. Huit athlètes (de même niveau) participent à une finale du 100m des jeux olympiques. Combien de podiums différents possibles ?

Proposition 4 [Nombre de bijections entre deux ensembles finis de même cardinal] Soient E et F deux ensembles finis de même cardinal n . Il y a $n!$ bijections de E sur F .

Remarque 4 Une p -liste $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments **distincts** de F (ou «arrangement») s'identifie à l'injection f de $\{1, \dots, p\}$ dans F telle que : $f(1) = x_1, \dots, f(p) = x_p$. On retrouve qu'il y a $n(n-1) \cdots (n-(p-1))$ p -listes formées d'éléments distincts de F si $\text{card}(F) = n$.

Remarque 5 Soit E un ensemble fini de cardinal n . Une bijection de E sur E est aussi appelée **permutation de E** . Il y a donc $n!$ permutations de E .

3 Dénombrement de sous-ensembles

Proposition 5 [Nombre de parties d'un ensemble fini]

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Il y a 2^n parties (ou sous-ensembles) de E .

Preuve. Notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et $\mathcal{A}(E, \{0, 1\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$. Soit $A \subset E$. Notons χ_A la fonction indicatrice de A , c'est-à-dire la fonction de E dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$\forall x \in A, \chi_A(x) = 1, \forall x \notin A, \chi_A(x) = 0.$$

L'application T de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{A}(E, \{0, 1\})$ définie par : $\forall A \in \mathcal{P}(E), T(A) = \chi_A$ est une bijection dont la bijection réciproque T^{-1} est définie de la façon suivante : $\forall f \in \mathcal{A}(E, \{0, 1\}), T^{-1}(f) = \{x \in E / f(x) = 1\}$. Par conséquent,

$$\text{card}(\mathcal{P}(E)) = \text{card}(\mathcal{A}(E, \{0, 1\})) = 2^n.$$

$\square$

Définition 3 Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarque 6 De manière évidente, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{0} = 1$ car $\emptyset$ est l'unique partie de E sans élément, $\binom{n}{1} = n$ (il y a n parties à un élément (singletons) de E et si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Proposition 6 Pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Preuve. Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Notons $\mathcal{P}_j(E)$ l'ensemble des parties de E ayant j éléments. Remarquons que l'application $f_p : \mathcal{P}_p(E) \rightarrow \mathcal{P}_{n-p}(E), A \mapsto E \setminus A$ est bijective avec $f_p^{-1} = f_{n-p}$. D'où $\binom{n}{p} = \text{card}(\mathcal{P}_p(E)) = \text{card}(\mathcal{P}_{n-p}(E)) = \binom{n}{n-p}$. Plus simplement, choisir p éléments parmi n revient à sélectionner $n-p$ éléments parmi n ... qu'on ne choisira pas. $\square$

Remarque 7 Une partie à p éléments s'appelle aussi une p -combinaison (sans répétitions) ou une combinaison à p éléments. Il est important de retenir qu'une partie (contrairement à une liste) n'est pas «ordonnée» : par exemple si $E = \{1, 2, 3\}$,

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

et on a en particulier $\{1, 3\} = \{3, 1\}$ alors que $(1, 3) \neq (3, 1)$.

Proposition 7 Pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1) \cdots (n-(p-1))}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Preuve. Avec les p éléments distincts d'une partie $A = \{x_1, \dots, x_p\}$ d'un ensemble E à n éléments, on peut constituer $p!$ listes d'éléments distincts de A obtenues en permutant les éléments de A . Par exemple, à partir de $A = \{x_1, x_2, x_3\}$, on obtient les 3-listes : (x_1, x_2, x_3) , (x_2, x_1, x_3) , (x_3, x_2, x_1) , (x_1, x_3, x_2) , (x_2, x_3, x_1) , (x_3, x_1, x_2) . Il y a donc $p!$ fois plus de listes que de p -combinaisons. D'où le résultat. $\square$

Proposition 8 [Relation de Pascal] Pour tout $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Preuve. Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments et $p \leq n$. Notons $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E ayant p éléments. Fixons un élément a de E et considérons les deux ensembles de parties suivants qui forment une partition de $\mathcal{P}_p(E)$:

$$\mathcal{P}'_p(E) = \{A \in \mathcal{P}_p(E) / a \in A\} \text{ et } \mathcal{P}''_p(E) = \{A \in \mathcal{P}_p(E) / a \notin A\}.$$

Une partie A de $\mathcal{P}'_p(E)$ est l'union disjointe du singleton $\{a\}$ et d'une partie A' à $p-1$ éléments de $E \setminus \{a\}$. Autrement dit dénombrer les parties de $\mathcal{P}'_p(E)$ revient à dénombrer les parties A' à $p-1$ éléments d'un ensemble à $n-1$ éléments. Par conséquent, $\text{card}(\mathcal{P}'_p(E)) = \binom{n-1}{p-1}$. Et comme une partie de $\mathcal{P}''_p(E)$ est une partie à p éléments de $E \setminus \{a\}$, $\text{card}(\mathcal{P}''_p(E)) = \binom{n-1}{p}$. Finalement, $\binom{n}{p} = \text{card}(\mathcal{P}_p(E)) = \text{card}(\mathcal{P}'_p(E)) + \text{card}(\mathcal{P}''_p(E)) = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$. $\square$

Remarque 8 La relation de Pascal permet de calculer de proche en proche les coefficients binomiaux. On peut alors disposer ces coefficients dans un tableau triangulaire, appelé triangle de Pascal, où le coefficient $\binom{n}{p}$ est à l'intersection de la ligne n et de la colonne p .

Rappelons enfin pour terminer la formule du binôme :

Proposition 9 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.

Preuve. On développe $(x+y)^n = (x+y) \cdots (x+y)$. Pour trouver le coefficient du terme en $x^k y^{n-k}$, on choisit x dans k parenthèses d'où x^k , et on choisit y dans les $n-k$ autres d'où y^{n-k} . Le résultat s'ensuit car il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces k parenthèses. $\square$

Remarque 9 En considérant $x = y = 1$ dans l'égalité précédente, on obtient l'égalité bien connue : $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. On retrouve ainsi qu'il y a 2^n sous-ensembles d'un ensemble E à n éléments car $\mathcal{P}_0(E), \mathcal{P}_1(E), \dots, \mathcal{P}_n(E)$ forment une partition de $\mathcal{P}(E)$ et $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\text{card}(\mathcal{P}_k(E)) = \binom{n}{k}$.

Exemple 3. Quel est le coefficient de $a^2 b^5 c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$? Réponse : 2520.