Intégrale à paramètre.

Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et suivant le contexte, $|\cdot|$ la valeur absolue ou le module. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_m^0(I,\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ev des fonctions continues par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$ev des fonctions u continues par morceaux sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, et intégrables sur I, c'est-à-dire telles que $\displaystyle\int_I |u(x)|\,dx$ converge.

1 Continuité

Théorème 1 *Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\,:\,A\times I\to\mathbb{K}\,,(x,t)\mapsto f(x,t)$. Si :*

a. $\forall t\in I,\ f(\cdot,t):A\to\mathbb{K},\ x\mapsto f(x,t)$ est **continue** *sur A,*

b. $\forall x\in A,\ f(x,\cdot):I\to\mathbb{K},\ t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,

c. `[Hypothèse de domination globale sur` f`]`

Il existe $\varphi\,:\,I\to\mathbb{R}^+,\ t\mapsto\varphi(t)$ continue par morceaux sur I et **intégrable sur I***, c'est-à-dire $\varphi\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$, telle que*

$$\forall (x,t)\in A\times I,\ |f(x,t)|\le\varphi(t)$$

alors $g\,:\,x\mapsto\int_I f(x,t)\,dt$ est continue sur A.

• On dit que $g(x)=\int_I f(x,t)\,dt$ est une *intégrale à paramètre (ou de paramètre) x.*

Preuve. Soit $x\in A$. Remarquons tout d'abord que, d'après c., que $g(x)=\int_I f(x,t)\,dt$ existe. En effet, comme $\forall t\in I,\ |f(x,t)|\le\varphi(t)$ et $\int_I\varphi(t)\,dt$ converge, $\int_I|f(x,t)|\,dt$ converge par comparaison de fonctions positives et par conséquent, $g(x)$ converge absolument donc converge.

Montrons maintenant que g est continue sur A en utilisant *la caractérisation séquentielle de la continuité.*
Considérons à nouveau $x\in A$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (quelconque) de A de limite x, quand n tend vers $+\infty$.
Vérifions que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} g(x_n)=g(x)$. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\forall t\in I,\ f_n(t)=f(x_n,t)$$

D'après b. chaque fonction f_n est continue par morceaux sur I. De plus, d'après a. la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers $f(x,\cdot)$ car $\forall t\in I,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t):=\lim_{n\to+\infty} f(x_n,t)=f(x,t)$ et d'après b. $f(x,\cdot)\in\mathcal{C}_m^0(I,\mathbb{K})$. Enfin d'après c. on a,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in I,\ |f_n(t)|\le\varphi(t)$$

et par hypothèse $\varphi\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$. Le théorème de convergence dominée s'applique donc avec la suite de fonctions (f_n) précédente et nous donne effectivement le résultat souhaité, à savoir :

$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n):=\lim_{n\to+\infty}\int_I f(x_n,t)\,dt=\int_I f(x,t)\,dt:=g(x)$$

Donc g est continu en $x\in A$ quelconque. Donc $g\in\mathcal{C}^0(A,\mathbb{K})$.

Remarque 1 *On peut remplacer dans le théorème 1 l'hypothèse de domination globale c. par l'hypothèse de domination locale c' suivante :*

Pour tout segment B inclus dans A, il existe $\varphi_B\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\forall (x,t)\in B\times I,\ |f(x,t)|\le\varphi_B(t)$$

En effet, le théorème précédent appliqué avec B à la place de A montre que g est continue sur B. Comme B est un segment quelconque de A, g est continue en tout x de A, donc sur A.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 2 *Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f\,:\,A\times I\to\mathbb{K}\,,(x,t)\mapsto f(x,t)$. Si :*

a. $\forall t\in I,\ f(\cdot,t):A\to\mathbb{K},\ x\mapsto f(x,t)$ est **continue** *sur A,*

b. $\forall x\in A,\ f(x,\cdot):I\to\mathbb{K},\ t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,

c. `[Hypothèse de domination locale sur` f`]`

Pour tout segment B inclus dans A, il existe $\varphi_B\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que

$$\forall (x,t)\in B\times I,\ |f(x,t)|\le\varphi_B(t)$$

alors $g\,:\,x\mapsto\int_I f(x,t)\,dt$ est continue sur A.

Examinons pour finir le cas particulier : $I=[a,b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et $f\,:\,A\times[a,b]\to\mathbb{K}$ est continue sur $A\times[a,b]$:

Corollaire 1 *Si $f\,:\,A\times[a,b]\to\mathbb{K}\in\mathcal{C}^0(A\times[a,b],\mathbb{K})$ alors $g\,:\,x\mapsto\int_a^b f(x,t)\,dt$ est continue sur A.*

Preuve. Comme ce cas particulier n'est pas a priori au programme, les arguments ci-dessous devront donc être rappelés.

Soit B un segment inclus dans A. Comme $B\times[a,b]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ et $|f|$ est continue sur $B\times[a,b]$, $|f|$ est majorée sur $B\times[a,b]$. Notons

$$M_B:=\max_{(x,t)\in B\times[a,b]}|f(x,t)|.$$

La condition c. du théorème 2 est satisfaite avec $\forall t\in I,\ \varphi_B(t)=M_B$ car une fonction constante sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$. Les conditions a. et b. étant clairement remplies, le théorème 2 s'applique et donne le résultat annoncé dans le corollaire.

2 Limites d'intégrales

Si les hypothèses du théorème 1 de continuité sont vérifiées, alors l'application $x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est continue sur A, autrement dit, pour tout $a \in A$, $\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\,dt = \int_I f(a,t)\,dt$. Le théorème suivant généralise le résultat précédent quand le paramètre x tend vers à une extrémité (borne) de l'intervalle A (par exemple quand $x \to +\infty$ si $A = \mathbb{R}^+$ ou quand $x \to 0^+$ si $A =]0,+\infty[$).

Théorème 3 *Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : A \times I \to \mathbb{K}, (x,t) \mapsto f(x,t)$ et a une borne de A. Si :*

a. $\forall x \in A$, $f(x,\cdot) : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I,

b. Il existe une fonction $\ell \in \mathcal{C}^0_m(I,\mathbb{K})$ telle que pour tout $t \in I$, $\lim_{x\to a} f(x,t) = \ell(t)$,

c. `[Hypothèse de domination globale sur f]` *Il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \varphi(t)$ intégrable sur I telle que*

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t),$$

alors pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, la fonction ℓ est intégrable sur I et on a :

$$\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\,dt = \int_I \ell(t)\,dt.$$

Principe de la preuve et remarques. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite en a et le théorème de convergence dominée. Dans le cas $a = +\infty$, l'hypothèse de domination globale c. peut être remplacée par une domination locale au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur $[x_0,+\infty[\times I$ pour un certain $x_0 \in A$.

3 Dérivabilité (sous le signe intégral)

Théorème 4 *Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}, (x,t) \mapsto f(x,t)$, partiellement dérivable par rapport à x sur $A \times I$, c'est-à-dire telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe.*

Supposons que :

a. $\forall x \in A$, $f(x,\cdot) : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I, i.e. $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$,

b. $\forall t \in I$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t) : A \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est **continue** *sur A,*

c. $\forall x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I,

d. `[Hypothèse de domination globale sur` $\dfrac{\partial f}{\partial x}$`]`

Il existe $\psi : I \to \mathbb{R}^+$, $t \mapsto \psi(t)$ **intégrable sur I**, *c'est-à-dire $\psi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$, telle que*

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$$

alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $\forall x \in A$, $g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Remarque 2 *Soit $t \in I$. D'après b. $f(\cdot,t) : x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^1(A,\mathbb{K})$.*

Remarque 3 *Soit $x \in A$. D'après d. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$ car $\displaystyle\int_I \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| dt$ converge par comparaison.*

Preuve du théorème 4. Soit $x \in A$ (quelconque). Montrons que g est dérivable en x en utilisant *la caractérisation séquentielle de la limite.* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $A \setminus \{x\}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le taux de variation de g entre x_n et x :

$$\frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x} = \int_I \frac{f(x_n,t) - f(x,t)}{x_n - x}\,dt$$

et posons pour tout $t \in I$:

$$h_n(t) = \frac{f(x_n,t) - f(x,t)}{x_n - x}$$

Comme f est partiellement dérivable par rapport à sa première variable en x, on a $\lim_{n\to+\infty} h_n(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

De plus d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_n \in]x_n, x[$ (ou $]x, x_n[$) tel que $h_n(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(c_n,t)$.

Par conséquent, d'après l'hypothèse de domination d. on a pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in I$, $|h_n(t)| \leq \psi(t)$. D'après le théorème de convergence dominée appliqué avec la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(x_n) - g(x)}{x_n - x} := \lim_{n\to+\infty} \int_I h_n(t)\,dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Donc, par la caractérisation séquentielle de la limite, g est dérivable en x et $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Enfin le théorème 1 s'applique avec $\frac{\partial f}{\partial x}$ à la place de f et ψ à la place de φ : g' est donc continue sur A.

Remarque 4 *On peut remplacer l'hypothèse de domination globale d. du théorème 4 précédent par l'hypothèse de domination locale d' suivante :*

Pour tout segment B inclus dans A, il existe $\psi_B \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\forall (x,t) \in B \times I,\ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi_B(t)$$

En effet, le théorème 4 appliqué avec B à la place de A montre que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B. Comme B est un segment quelconque de A, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A.

La remarque précédente nous permet d'énoncer le théorème de dérivabilité suivant :

Théorème 5 *Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}, (x,t) \mapsto f(x,t)$, partiellement dérivable par rapport à x sur $A \times I$, c'est-à-dire telle que $\forall (x,t) \in A \times I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ existe.*

Supposons que :

a. $\forall x \in A$, $f(x,\cdot) : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto f(x,t)$ *est intégrable sur I, i.e.* $f(x,\cdot) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$,

b. $\forall t \in I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\cdot,t) : A \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est* **continue** *sur A,*

c. $\forall x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) : I \to \mathbb{K}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur I,*

d. `[Hypothèse de domination locale sur` $\frac{\partial f}{\partial x}$`]`

Pour tout segment B inclus dans A, il existe $\psi_B \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$, telle que

$$\forall (x,t) \in B \times I,\ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi_B(t).$$

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et $\forall x \in A$, $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ (Formule de Leibniz).

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Corollaire 2 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}, (x,t) \mapsto f(x,t)$ telle que $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existent sur $A \times I$. Supposons que :*

a. $\forall t \in I$, $x \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ *est continue sur A,*

b. $\forall x \in A$, $\forall k \in \{0, \cdots, n-1\}$, $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})$,

c. `[Hypothèse de domination locale sur` $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$`]`

Pour tout segment B inclus dans A, il existe $\psi_B \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$, telle que

$$\forall (x,t) \in B \times I,\ |\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)| \leq \psi_B(t).$$

Alors pour tout $x \in A$, $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A et

$$\forall k \in \{1, ..., n\},\ \forall x \in A,\ g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt.$$

Preuve. On procède par récurrence sur n. Remarquons que si $n = 1$, le corollaire ci-dessus est le théorème 5. La preuve détaillée est laissée au lecteur en exercice.

Remarque 5 *Soit $t \in I$. On peut remplacer l'hypothèse a. par : $x \mapsto f(x,t) \in \mathcal{C}^n(A,\mathbb{K})$.*

4 Exercices.

Exercice 1. `[Transformation de Laplace]` Soit $f \in \mathcal{C}^0_m(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ telle que pour tout $x > 0$, $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
La transformée de Laplace de f, notée Lf, est la fonction de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x > 0,\ Lf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt.$$

1. Démontrer que la fonction Lf est continue sur $]0, +\infty[$.
2. On suppose que f admet une limite finie à droite en 0 et en $+\infty$. On pose : $\ell_0 = \lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$ et $\ell_\infty = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} xLf(x) = \ell_0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} xLf(x) = \ell_\infty$.
Indication : commencer par effectuer le changement de variable : $u = xt$ dans $Lf(x)$.

Exercice 2. `[La fonction Gamma]` On rappelle que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.

1. Démontrer que Γ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.
2. On rappelle que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Prouver que $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
3. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et préciser $\Gamma'(x)$, $x > 0$.
4. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et préciser $\Gamma^{(n)}(x)$ pour tout $n \geq 2$ et tout $x > 0$.

Exercice 3. Soient $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que la fonction $f^2 + g$ est constante sur $\mathbb{R}$.
3. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g(x) \leq e^{-x^2}$ et préciser $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
4. Déduire de ce qui précède la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Exercice 4. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.
1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.
3. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, dt$.
1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et préciser, pour tout $x > 0$, la valeur de $f'(x)$.
2. En déduire $f(x)$, pour tout $x > 0$.

Exercice 6. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0$, $f'(x) = \dfrac{I}{\sqrt{x}}$ où $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$.
3. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt}\, dt.$$

1. Vérifier que $\hat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On dit que $\hat{f}$ *est la transformée de Fourier de f.*
2. Montrer que $\hat{f}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
3. On suppose que $t \mapsto tf(t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Prouver que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $(\hat{f})'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
4. *Un exemple de calcul de transformée de Fourier.* Soit $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$.
Vérifier que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ et calculer $\hat{f}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5. *Un autre exemple de calcul de transformée de Fourier.* Soit $f(t) = e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$.
a. Vérifier que $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$.
b. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{f}(x) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\, dt$.
c. Prouver que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\hat{f}$ est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du premier ordre.
d. Calculer $\hat{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2 t^2)}{1 + t^2}\, dt$, $x \in \mathbb{R}$.
1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\pi}{x+1}$. En déduire $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.