I. Convergence dominée.

Exercice 1. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+x^n e^{-x}}$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

Indications. 1. Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+x^n e^{-x}}$. Cette fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ existe par la règle de l'équivalent positif car $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ sachant que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ existe ou par comparaison (de fonctions positives) car $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) \le \dfrac{1}{1+x^2}$ sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ existe $(= \frac{\pi}{2})$.

2. *i)* <u>CVS</u> : vérifier que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f, continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$, définie par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ si $x \in [0,1[$, $f(1) = \dfrac{1}{2+e^{-1}}$, et $f(x) = 0$ si $x > 1$.

ii) <u>Hypothèse de domination</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(x)| = f_n(x) \le \dfrac{1}{1+x^2}$ $\cdots$

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\,dt$.
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

Indications. 1. Soit $f_n : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{nt+t^2}$, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Cette fonction est prolongeable par continuité (à droite) en 0 en posant : $f_n(0) = 1$ car $\sin(nt) \underset{t\to 0}{\sim} nt$ et $nt + t^2 \underset{t\to 0}{\sim} nt$. Donc $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ existe. De plus $K_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe (converge) car elle converge *absolument* par comparaison de fonctions positives : $\forall t \ge 1$, $|f_n(t)| \le \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ existe.
Finalement $I_n = J_n + K_n$ existe.

2. *i)* <u>CVS</u> : Pour tout $t > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(t)| \le \dfrac{1}{nt}$.
La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction nulle θ (continue sur $\mathbb{R}^{+*}$).

ii) <u>Hypothèse de domination</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t > 0$, $|f_n(t)| \le g(t)$ avec : $g(t) = 1$ si $t \in]0,1]$ (car $|\sin(nt)| \le |nt| = nt$) et $g(t) = \dfrac{1}{t^2}$ si $t \ge 1$. Et cette fonction g (indépendante de n) est bien intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \theta(x)\,dx = 0$.

Exercice 3. *Très détaillé.* Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = n \displaystyle\int_0^1 \frac{f(nx)}{1+x}\,dx$.

1. Vérifier que $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{f(t)}{1+\frac{t}{n}}\,dt = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ avec $f_n(t) = \dfrac{f(t)}{1+\frac{t}{n}}$ si $t \in [0,n]$ et $f_n(t) = 0$ si $t > n$.

2. a. Soit $t \ge 0$. Vérifier que $\forall n \ge E(t)+1$, $f_n(t) = \dfrac{f(t)}{1+\frac{t}{n}}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

2. b. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(t)| \le |f(t)|$.

2. c. Prouver finalement avec le théorème de convergence dominée que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Exercice 4. Soit f l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{-x}\ln(x)$, $x > 0$.

1. Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge absolument.

2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n \ln(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Prouver l'existence de I_n.
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (1-\dfrac{x}{n})^n \ln(x)$ si $x \in]0,n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

2. b. Etudier la convergence simple sur $]0,+\infty[$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. c. Vérifier que $\forall t \in [0,1[$, $\ln(1-t) \le -t$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $|f_n(x)| \le |f(x)|$.

2. d. Vérifier que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ et prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = I$.

Solution : La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, négative sur $]0,1]$ et positive sur $[1,+\infty[$.

1. Vérifions que $I_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ et $I_2 = \int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ convergent.

• *Existence de* I_1 : $I_1 = \int_0^1 (-f(x))\,dx$ converge par la règle de l'équivalent positif car $-f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$ et d'après le cours, $\int_0^1 (-\ln(x))\,dx$ converge (égale à 1).

• *Existence de* I_2 : pour tout $x \geq 1$, $0 \leq x^2|f(x)| = x^2 f(x) \leq xe^{-x}$ car $\ln(x) \leq x$.
D'où $\lim_{x\to+\infty} x^2|f(x)| = 0$ par croissance comparée en $+\infty$ et le théorème des gendarmes.
Donc I_2 converge par le critère de Riemann en $+\infty$.

2. a. Même preuve que pour l'existence de I_1 (cf. **1**). On remarque que $(1-\frac{x}{n})^n \ln(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$ et on utilise la règle de l'équivalent de signe constant (négatif ici).

2. b. Soit $x > 0$. Pour tout $n \geq E(x)+1$, $x \in]0,n[$ et donc $f_n(x) = (1-\frac{x}{n})^n \ln(x) = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}\ln(x)$.
Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}\ln(x) = e^{-x}\ln(x)$$

En effet, $\ln(1+t) = t + t\varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0$. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(1-\frac{x}{n}) = \lim_{n\to+\infty} n(-\frac{x}{n} - \frac{x}{n}\varepsilon(-\frac{x}{n})) = \lim_{n\to+\infty}(-x - x\varepsilon(-\frac{x}{n})) = -x$$

car $\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(-\frac{x}{n}) = 0$ et enfin $\lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} = e^{-x}$ par continuité de la fonction exponentielle en x.

2. c. L'étude des variations de la fonction $t \mapsto -t - \ln(1-t)$ montre que $\forall t > -1$, $\ln(1-t) \leq -t$ $(*)$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. Distinguons deux cas :
i) Si $x \in]0,n[$, $-\frac{x}{n} \in]-1,0[$. Par $(*)$, on a alors : $\ln(1-\frac{x}{n}) \leq -\frac{x}{n}$ et, la fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| = (1-\frac{x}{n})^n|\ln(x)| = e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}|\ln(x)| \leq e^{-x}|\ln(x)|.$$

ii) Si $x \geq n$, on a aussi $|f_n(x)| \leq e^{-x}|\ln(x)|$ car $f_n(x) = 0$.
En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $|f_n(x)| \leq e^{-x}|\ln(x)|$.

2. d. Comme $\int_n^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_n^{+\infty} 0\,dx = 0$, la relation de Chasles donne :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^n f_n(x)\,dx + \int_n^{+\infty} f_n(x)\,dx = I_n + \int_n^{+\infty} f_n(x)\,dx = I_n.$$

Le théorème de convergence dominée permet de calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$:
i) La suite de fonctions (f_n) (continues sur $\mathbb{R}^{+*}$) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers f (continue sur $\mathbb{R}^{+*}$) (cf. **2. b.**)
ii) Comme f est intégrable sur $]0,+\infty[$ (cf. **1.**), l'inégalité obtenue en **2. c.** montre que l'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée est satisfaite.
On peut donc conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)\,dx.$$

II. TITT de la somme d'une série de fonctions intégrables.

Exercice 5. *Très détaillé.* On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$. Soit $I = \int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}x)\,dx$.

1. a. Ecrire le $DL_1(0)$ de th$x$. En déduire que $\ln(\mathrm{th}x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$.

1. b. Vérifier que $\forall x > 0$, $\ln(\mathrm{th}x) = \ln(1-e^{-2x}) - \ln(1+e^{-2x})$. En déduire que $\ln(\mathrm{th}x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -2e^{-2x}$.

1. c. Prouver l'existence de I.

2. *On rappelle (cf. DSE(0)) que* $\forall t \in]-1,1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+t}{1-t})$.

Montrer que $\forall x > 0$, $\ln(\mathrm{th}x) = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-2(2n+1)x}}{2n+1}$, puis que $I = -\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-(2n+1)t}}{2n+1}\,dt$.

3. Montrer avec le TITT que $I = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

4. a. Vérifier que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{N}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^2}.$$

4. b. *On admet que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déduire de **3.** et **4. a.** que $I = -\dfrac{\pi^2}{8}$.

Exercice 6. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On note $I(a,b)$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)}\,dx$.

1. Déterminer un équivalent de $\operatorname{sh}(t)$ quand t tend vers 0 et un équivalent de $\operatorname{sh}(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
En déduire que l'intégrale $I(a,b)$ converge.

2. Vérifier que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)bx}\operatorname{sh}(ax)$.

3. Enoncer avec précision le théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions intégrables.

4. Justifier que $\displaystyle I(a,b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2}$.

Solution : **1.** Rappelons que $\operatorname{sh}(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ $(*)$ et que $\operatorname{sh}(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^t}{2}$ $(**)$. La fonction f, définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)}$, est continue sur $]0,+\infty[$. D'après $(*)$, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{a}{b}$ car $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$. Donc $I_1(a,b) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ existe. *Variante.* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ existe par la règle de l'équivalent positif car $\displaystyle\int_0^1 \frac{a}{b}\,dx = \frac{a}{b}$ converge.
D'après $(**)$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-(b-a)x}$ donc $I_2(a,b) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ existe par la règle de l'équivalent positif car, d'après le cours, $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-(b-a)x}\,dx$ converge puisque $b - a > 0$. *Variante* : $I_2(a,b)$ converge par le critère de Riemann en $+\infty$ car f est continue, positive sur $[1,+\infty[$, et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-(b-a)x} = 0$. En conclusion $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge car $I_1(a,b)$ et $I_2(a,b)$ convergent.

2. Rappelons que pour tout $t \in]-1,1[$, $\displaystyle\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ $(***)$. Soit $x > 0$. On a tout d'abord :

$$\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)} = \frac{2\operatorname{sh}(ax)}{e^{bx} - e^{-bx}} = \frac{2\operatorname{sh}(ax)}{e^{bx}(1 - e^{-2bx})} = \frac{2\operatorname{sh}(ax)e^{-bx}}{1 - e^{-2bx}}.$$

Puis en utilisant $(***)$ avec $t = e^{-2bx} \in]0,1[$, on obtient finalement :

$$\frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)} = 2\operatorname{sh}(ax)e^{-bx}\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-2bx})^n = 2\operatorname{sh}(ax)e^{-bx}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nbx} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2\operatorname{sh}(ax)e^{-(2n+1)bx}.$$

3. Rappelons ci-dessous l'énoncé du théorème d'intégration terme à terme (TITT) de la somme d'une série de fonctions intégrables :
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est intégrable sur I,

b. La série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_n$ converge simplement sur I et sa somme $f := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathcal{C}^0_m(I,\mathbb{K})$,

c. La série $\displaystyle\sum_{n\ge 0}\int_I |u_n(x)|\,dx$ converge.

Alors f est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n(x)\,dx$, i.e. $\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I u_n(x)\,dx$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons pour tout $x > 0$, $u_n(x) = 2\operatorname{sh}(ax)e^{-(2n+1)bx}$. La série de fonctions $\sum u_n$ vérifie les trois hypothèses **a**, **b** et **c** du TITT rappelées ci-dessus. En effet :

a. Chaque fonction (positive) u_n est intégrable sur $I =]0,+\infty[$ par la règle de l'équivalent positif car d'une part d'après $(**)$

$$|u_n(x)| = u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{(a-(2n+1)b)x}$$

et d'autre part $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{(a-(2n+1)b)x}\,dx$ converge d'après le cours puisque $a - (2n+1)b < 0$.

b. On a prouvé en **2.** que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $f : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)}$ et f est continue sur $]0,+\infty[$ donc a fortiori continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\, dx$. Introduisons pour cela

$$J_n(A) = \int_0^A |u_n(x)|\, dx = \int_0^A u_n(x)\, dx = 2\int_0^A \mathrm{sh}(ax)e^{-(2n+1)bx}$$

avec $A > 0$. On a :

$$\begin{aligned} J_n(A) &= \Big(\int_0^A e^{(a-(2n+1)b)x}\, dx - \int_0^A e^{-(a+(2n+1)b)x}\, dx\Big) \\ &= [\frac{e^{(a-(2n+1)b)x}}{a-(2n+1)b}]_0^A + [\frac{e^{-(a+(2n+1)b)x}}{a+(2n+1)b}]_0^A \\ &= \frac{e^{(a-(2n+1)b)A} - 1}{a-(2n+1)b} + \frac{e^{-(a+(2n+1)b)A} - 1}{a+(2n+1)b} \end{aligned}$$

Or $a-(2n+1)b < 0$ et $-(a+(2n+1)b) < 0$, donc $\lim\limits_{A\to+\infty} e^{(a-(2n+1)b)A} = \lim\limits_{A\to+\infty} e^{-(a+(2n+1)b)A} = 0$. Donc :

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\, dx = \int_0^{+\infty} u_n(x)\, dx = \lim_{A\to+\infty} J_n(A) = -(\frac{1}{a-(2n+1)b} + \frac{1}{a+(2n+1)b}) = \frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2}.$$

D'où la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\, dx$ par la règle de l'équivalent positif car

$$\int_0^{+\infty} |u_n(x)|\, dx \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a}{2b^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

sachant que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
Par conséquent, d'après le TIIT, f est intégrable sur $]0,+\infty[$ (déjà prouvé directement en **1.**) et :

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2}.$$