Intégrale à paramètre.

Problème 1. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$ et que f est impaire.

2. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. *Calcul de l'intégrale $f'(x)$.*

3. a. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Déterminer les réels $a(x)$ et $b(x)$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{a(x)}{1+t^2} + \frac{b(x)}{1+x^2t^2}.$$

3. b. En déduire la valeur de $f'(x)$ et de $f(x)$ pour tout réel x.

4. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\arctan t)^2}{t^2}\,dt$.

4. a. Justifier la convergence de I.

4. b. Calculer I. *Indication : intégrer par parties et utiliser 3. b.*

Problème 2. [`Calcul de` $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$]

1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ existe.

2. Montrer que l'on définit une fonction f continue sur $\mathbb{R}^+$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,e^{-xt}\,dt.$$

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f''(x)$ si $x > 0$.

4. Montrer avec le théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

5. En déduire $f(x)$ si $x > 0$ et la valeur de I.

6. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Solution du problème 1 : Posons, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, $k(x,t) = \dfrac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$.

1. *i)* On rappelle que $\arctan y \underset{y\to 0}{\sim} y$. On en déduit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 k(x,t)\,dt$ converge en 0 car $t \mapsto k(x,t)$ est prolongable par continuité en 0 en posant : $k(x,0) = \displaystyle\lim_{t\to 0^+} k(x,t) = x$.

ii) l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} k(x,t)\,dt$ converge par comparaison (positive) en $+\infty$ car pour tout $t \geq 1$, $0 \leq k(x,t) \leq \dfrac{\frac{\pi}{2}}{1+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'intégrale égale à $\frac{\pi^2}{4}$.

De plus, f est impaire car arctan est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} k(-x,t)\,dt = -\int_0^{+\infty} k(x,t)\,dt = -f(x)$.

Remarque : $f(0) = 0$.

2. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre afin de prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Posons, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$, $k(x,t) = \dfrac{\arctan(tx)}{t(1+t^2)}$. La fonction k est partiellement dérivable par rapport à x :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[,\ \frac{\partial k}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Les hypothèses a, b et c suivantes sont clairement vérifiées avec $A = \mathbb{R}$ et $I =]0, +\infty[$:

a. $\forall x \in A$, $k(x,\cdot) : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto k(x,t)$ est continue (a fortiori par morceaux) et intégrable sur $I =]0, +\infty[$ d'après 1.,

b. $\forall t \in I$, $\dfrac{\partial k}{\partial x}(\cdot, t) : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\partial k}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A,

c. $\forall x \in A$, $\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,\cdot) : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial k}{\partial x}(x,t)$ est continue (a fortiori par morceaux) sur I.

Enfin l'hypothèse d. de «domination globale sur $\dfrac{\partial k}{\partial x}$» est satisfaite car :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[,\ |\frac{\partial k}{\partial x}(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}\ \text{(indépendant de } x\text{)}$$

sachant que $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'intégrale égale à $\frac{\pi}{2}$.

En conclusion, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial k}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

3. a. On obtient : $a(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ et $b(x) = -\dfrac{x^2}{1-x^2}$.

3. b. Supposons d'abord x *strictement positif, différent de* 1, et utilisons la décomposition obtenue en 3. a. pour calculer $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1-x^2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^2t^2}\right) \\
&= \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - x[\arctan(xt)]_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - x \lim_{T\to+\infty}[\arctan(xt)]_0^T\right) \\
&= \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{\pi}{2} - x\frac{\pi}{2}\right) \quad \textit{car } x > 0 \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x}.
\end{aligned}$$

Et comme f' est *continue* sur $\mathbb{R}^+$ d'après 2., $f'(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x} = \frac{\pi}{2}$ et $f'(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x} = \frac{\pi}{4}$.
Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+x}.$$

D'où l'existence d'une constante réelle C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x) + C$. Or $f(0) = 0$, donc $C = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x).$$

Enfin, f étant *impaire* sur $\mathbb{R}$, si $x \leq 0$, $-x \geq 0$, et $f(x) = -f(-x) = -\frac{\pi}{2}\ln(1-x)$.

4. a. Posons $u(t) = \dfrac{(\arctan t)^2}{t^2}$ pour tout $t > 0$: u est continue sur $]0, +\infty[$.

i) On rappelle que $\arctan t \underset{t\to 0}{\sim} t$. Alors $\displaystyle\int_0^1 u(t)\,dt$ converge en 0 car u est prolongable par continuité (à droite) en 0 en posant : $u(0) = 1$,

ii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)\,dt$ converge par comparaison (positive) en $+\infty$ car pour tout $t \geq 1$, $0 \leq u(t) \leq \dfrac{\frac{\pi^2}{4}}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

4. b. Intégrons par parties $I(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{(\arctan t)^2}{t^2}\,dt$ avec $0 < a < b$:

$$I(a,b) = [-\frac{1}{t}(\arctan t)^2]_a^b + 2\int_a^b \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\,dt.$$

Or $\dfrac{1}{t}(\arctan t)^2 \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $\dfrac{1}{t}(\arctan t)^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{4}\dfrac{1}{t}$ d'où :

$$I = \lim_{a\to 0^+,\, b\to+\infty} I(a,b) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t(1+t^2)}\,dt = 2f(1) = \pi\ln 2$$

d'après 3. b.

Indications pour le problème 2.

1. Posons pour tout $t > 0$, $\phi(t) = \dfrac{1-\cos t}{t^2}$. Remarquer ϕ est prolongeable par continuité en 0 et que $\forall t > 0$, $\phi(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$.

2. Posons pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$, $h(x,t) = \phi(t)\,e^{-xt}$.
Remarquer que $\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$, $|h(x,t)| = h(x,t) \leq \phi(t)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(t)\,dt = I$ converge.

3. Soit $[a,b] \subset]0,+\infty[$. Vérifier que $\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$, $|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)| \leq 2e^{-at}$.

On obtient par théorème que pour tout $x > 0$, $f''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\,dt = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$.

4. Pour prouver que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, remarquer que ϕ, prolongée par continuité en 0, est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
Même méthode pour prouver que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

5. Vérifier que $\forall x > 0$, $f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}$. Utiliser la continuité de f (à droite) en 0 pour calculer I.

6. Soient $0 < \varepsilon < A$. Intégrer par parties $\displaystyle\int_\varepsilon^A \frac{\sin x}{x}\,dx$ en prenant $x \mapsto 1 - \cos x$ comme primitive de sin.