

Ondes mécaniques unidimensionnelles

Ex. 1 Onde de compression et onde de torsion

On considère une poutre cylindrique d'axe Ox , de section S , de masse volumique ρ .

1. Quand on tire sur les extrémités de la poutre, celle-ci s'allonge. Pour de faibles déformations, l'allongement est proportionnel à la force et on définit le module d'Young E par $\sigma = E\varepsilon$, où σ est la contrainte (force surfacique) normale et ε l'allongement relatif (i.e. la variation de longueur d'une tranche élémentaire du solide, divisée par la longueur de cette tranche au repos).

Le déplacement longitudinal du point d'abscisse x à l'instant t est noté $u(x,t)$.

On considère une tranche élémentaire de poutre d'épaisseur dx .

- (a) Exprimer $\varepsilon(x,t)$ en fonction de u .
 - (b) En appliquant la loi de la quantité de mouvement, montrer que le déplacement longitudinal $u(x,t)$ suit une équation de D'Alembert. En déduire la vitesse de propagation c_P des ondes de compression dans cette poutre. On obtient numériquement $c_P = 5.15 \text{ km s}^{-1}$.
2. Cette poutre peut également se déformer en tournant autour de l'axe Ox . On admettra qu'une tranche de longueur infinitésimale dx possède un moment d'inertie $dJ = j dx$ par rapport à Ox et que le couple exercé sur la tranche par la partie droite de la poutre est $\Gamma(x,t) = +\gamma \frac{\partial \alpha}{\partial x}(x,t)$ où $\alpha(x,t)$ est l'angle de torsion à l'abscisse x . γ est le coefficient de torsion linéique de la poutre.
 - (a) Établir l'équation de propagation d'une onde de torsion le long de la poutre. En déduire la célérité c_S des ondes de torsion.
 - (b) Application numérique. Pour une poutre à section de rayon R , $j = \frac{1}{2} \pi \rho R^4$ et $\gamma = \frac{1}{2} \pi G R^4$ avec $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ (masse volumique) et $G = 8.10^{10} \text{ Pa}$ (module de cisaillement). Calculer c_S .
 3. On frappe un coup sur une extrémité de la poutre, dans une direction quelconque, excitant à la fois la poutre en pression et en torsion. Quelles ondes arrivent en premier à l'autre extrémité de la poutre ?

Correction de l'exercice 1

1. (a) Il est indispensable de faire un schéma, en zoomant sur la tranche dx d'intérêt. On se rend ainsi compte que la variation de la longueur de la tranche est $u(x+dx,t) - u(x,t)$. Donc : $\varepsilon = \frac{u(x+dx,t) - u(x,t)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$.
- (b) On applique la loi de la quantité de mouvement à la tranche dx :

$$\mu S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = +ES \frac{\partial u}{\partial x}(x+dx,t) - ES \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = ES \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \iff \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{Ex.1})$$

$$\text{Donc } c_P = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

2. (a) En appliquant la loi du moment cinétique scalaire à une tranche infinitésimale, par rapport à l'axe (Ox) et à l'aide de la loi des actions réciproques :

$$j dx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Gamma(x,t) - \Gamma(x+dx,t) = +\gamma \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} dx \iff \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \frac{\gamma}{j} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (\text{Ex.2})$$

$$(b) \text{ Donc } c_S = \sqrt{\frac{\gamma}{j}} = \sqrt{\frac{\pi G R^4}{\pi \rho R^4}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3.20 \text{ km s}^{-1}$$

3. Les ondes de compression, car elles circulent plus vite que les ondes de torsion.

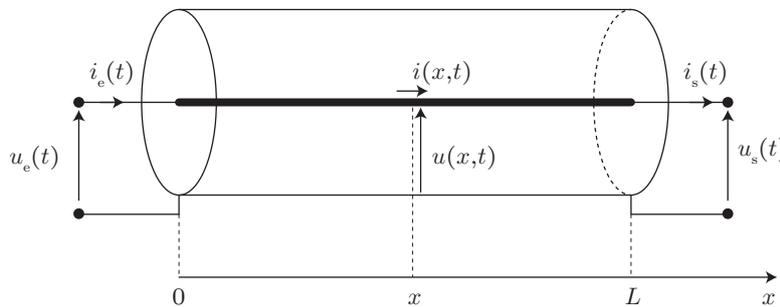
Ex. 2 Équation d'onde dans un câble coaxial

On cherche à déterminer une équation de d'Alembert dans le domaine de la propagation des signaux électriques.

Les câbles coaxiaux sont très couramment utilisés pour transmettre des signaux sur de longues distances (antennes de transmissions, TP...). Ils sont constitués d'un conducteur central (appelé l'âme), d'une tresse métallique périphérique en cuivre ou aluminium, le tout séparé par un isolant électrique. En général le conducteur périphérique est porté à la masse.

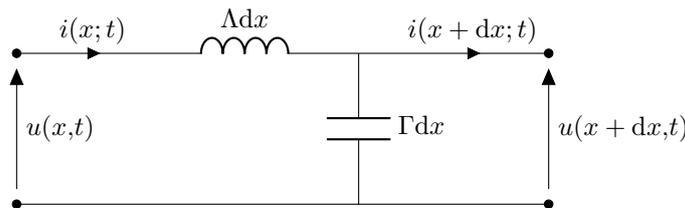


La tension est appliquée entre les deux conducteurs, et le courant circule en sens inverse dans les deux conducteurs. Comme on étudie la propagation de signaux électriques, on ne se place pas dans le cadre de l'ARQS. On note alors $i(x,t)$ et $u(x,t)$ la tension et le courant à une abscisse x du câble :



1. Rappeler l'hypothèse de l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) en électronique dans le cas d'une tension périodique de fréquence f . A.N. : Calculer la longueur maximale d'un câble ethernet pour que l'ARQS soit vérifiée, sachant que dans ces câbles, $f \sim 10$ MHz.

La modélisation du câble coaxial, ne respectant plus l'ARQS, nécessite un découpage en tronçons de longueur élémentaire dx . On propose alors un modèle sans perte (aucune résistance électrique des câbles modélisée), appelée modèle à constantes réparties :



où Γdx est la capacité, Λdx est l'inductance. Les ordres de grandeurs de la capacité linéique et de l'inductance linéique sont : $\Gamma = 100 \text{ pF m}^{-1}$ et $\Lambda = 0.25 \text{ }\mu\text{H m}^{-1}$.

2. Pourquoi, dans un câble coaxial, apparait-il des effets capacitifs (modélisés par Γ) et des effets inductifs (modélisés par Λ) ?
3. En appliquant la loi des mailles, déterminer une relation entre $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial i}{\partial t}(x,t)$.
4. (a) En appliquant la loi des nœuds, montrer que :

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t)$$

- (b) En réalisant un développement limité de $\frac{\partial u}{\partial t}(x+dx,t)$, montrer que l'équation précédente se simplifie à

l'ordre le plus bas en dx et donner la relation simplifiée entre $\frac{\partial i}{\partial x}(x,t)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$.

5. En déduire l'équation de d'Alembert vérifiée par la tension $u(x,t)$. Exprimer puis calculer numériquement la vitesse de propagation de l'onde électrique. Commenter.

Correction de l'exercice 2

- ARQS : la distance caractéristique de variation de l'onde électrique est bien plus grande que la longueur du circuit $L \ll \lambda = \frac{c}{f}$. A.N. : on suppose que $c \sim 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, donc $L \ll 30 \text{ m}$, facilement mis en défaut dans la vie quotidienne (circuit éthernet du lycée par exemple).
- Un câble coaxial est un ensemble de deux conducteurs électriques en regard, séparés par un isolant : on reconnaît la structure d'un condensateur cylindrique ! Des charges peuvent s'accumuler sur les armatures, générant des effets capacitifs.
Mais un câble coaxial est aussi une très longue spire parcourue par un courant : des effets inductifs sont aussi présents. La modélisation à constantes réparties du câble coaxial est donc liée à ces effets.
- Remarque :** Comme on étudie désormais une portion infinitésimale du circuit, l'ARQS s'applique sur cette portion, et on peut appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds usuelles.
On écrit la loi des mailles que l'on développe au premier ordre en dx :

$$u(x,t) = \Lambda dx \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + u(x+dx,t) \implies \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0 \implies \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}} \quad (\text{Ex.3})$$

- (a) La loi des nœuds, avec le courant traversant le condensateur :

$$i(x,t) = i(x+dx,t) + \Gamma dx \frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} \quad (\text{Ex.4})$$

(b)

$$\frac{\partial u(x+dx,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx \right) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} dx$$

avec le dernier terme qui donnera un ordre 2 en dx quand on le ré-injectera dans l'équation précédente : on le néglige.

Donc :

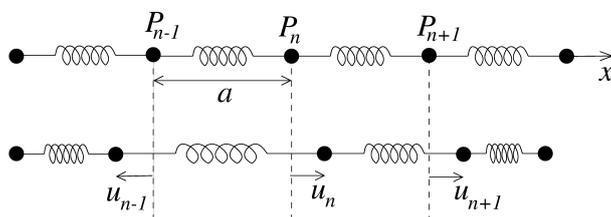
$$\implies \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}} \quad (\text{Ex.5})$$

- En dérivant la première par rapport à x et la deuxième par rapport à t , on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \implies \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Gamma \Lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \quad (\text{Ex.6})$$

On reconnaît là une équation de d'Alembert, en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \sim 2 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Cette vitesse est proche de la vitesse de la lumière dans le vide !

Ex. 3 Modèle microscopique de la propagation du son dans un solide



On considère une chaîne rectiligne infinie de points matériels P_n identiques, de masse m , de position x_n , reliés par des ressorts identiques de longueur à vide a et de raideur K .

À l'équilibre, les points sont régulièrement espacés : $x_n = na$.

On note $u_n(t)$ le déplacement du point P_n par rapport à sa position d'équilibre.

- Montrer que

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{K}{m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

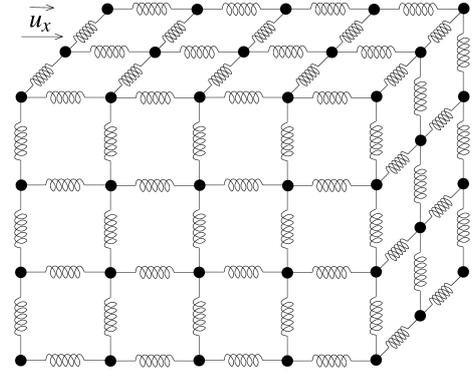
2. Approximation continue. On considère le cas où la distance a entre deux points successifs est très petite devant l'échelle caractéristique de variation des u_n . On peut alors modéliser les déplacements de l'ensemble des points par une fonction de classe \mathcal{C}^2 , $u(x,t)$, qui coïncide avec les fonctions $u_n(t)$ lorsque $x = na$: $u(x = na, t) = u_n(t)$. En effectuant des développements limités de $u_{n+1}(t) = u(na + a, t)$ et de $u_{n-1}(t) = u(na - a, t)$, montrer que $u(x,t)$ vérifie une équation de D'Alembert.
3. En déduire la vitesse de propagation des ondes dans la chaîne en fonction de K , a et m . On précisera également le type d'onde qui se propage.

Ondes sonores dans un solide

considère un solide de module d'Young E et de masse volumique μ , dans lequel les atomes sont modélisés par des masses ponctuelles, en réseau cubique simple de paramètre de maille a , reliées par des ressorts identiques de raideur K et de longueur à vide a .

On considère une onde plane longitudinale se propageant selon la direction \vec{e}_x : le déplacement des atomes ne dépend que de x et est dirigé selon \vec{e}_x .

4. On s'intéresse à l'atome n . Ré-exprimer, dans le cadre de l'approximation des milieux continus, la force exercée par l'atome $n + 1$ sur l'atome n . En déduire l'expression du module d'Young en fonction des caractéristiques microscopiques du solide.
5. Déterminer la vitesse de propagation de l'onde en fonction du module d'Young et de la masse volumique. Faire l'application numérique pour un acier de masse volumique $\mu = 7,9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.



Validation a posteriori de l'approximation des milieux continus

4. Etablir la relation de dispersion associée à l'équation de d'Alembert. En déduire l'intervalle de variation de la longueur d'onde des ondes acoustiques audibles dans l'acier.
5. En déduire que l'échelle caractéristique spatiale de variation de $u(x,t)$ est largement supérieure à l'ordre de grandeur de la distance a entre deux atomes.

Correction de l'exercice 3

1. Appliquons la loi de la quantité de mouvement à la masse n soumise à deux forces de rappel de la part des ressorts de gauche et de droite, dans le référentiel galiléen du laboratoire, projeté selon l'axe (Ox) :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = K(u_{n+1} - u_n) - K(u_n - u_{n-1}) \iff \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{K}{m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (\text{Ex.7})$$

2. Dans l'approximation continue, à l'ordre 2 : $u_{n+1} = u(na + a, t) \simeq u(na, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(na, t)a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{a^2}{2}$, de même $u_{n-1} = u(na, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(na, t)a + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{a^2}{2}$, soit en injectant dans l'équation précédente :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{Ka^2}{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{Ex.8})$$

c'est-à-dire une équation de d'Alembert, en posant $c = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$.

3. $c = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}}$. Il s'agit ici d'une onde longitudinale, car la direction de propagation est la même que celle de la déformation.
4. La force exercée sur la masse n par l'atome $n + 1$ est, de même qu'à la Q.1 : $\vec{F}_{d,n} = K(u_{n+1} - u_n)\vec{e}_x$. Dans le cadre de l'approximation continue, le DL de u_{n+1} permet d'écrire : $\vec{F}_d(x,t) = K \frac{\partial u}{\partial x} a \vec{e}_x$.

On reconnaît quasiment une loi de Hooke en identifiant $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{n+1} - u_n}{a}$ à la variation relative de longueur du cristal. Il reste à étudier la force exercée sur l'ensemble du plan de section S par l'ensemble des atomes situés à droite de ce plan : $\vec{F}_{d,plan}(x,t) = \frac{S}{a^2} \times \vec{F}_d(x,t) = \frac{KS}{a} \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_x$ car il y a S/a^2 chaînes d'atomes sur la section S . Ainsi, par identification : $E = \frac{K}{a}$.

5. On peut exprimer la célérité en fonction du module d'Young :

$$c = \sqrt{\frac{Ka^2}{m}} = \sqrt{\frac{Ea^3}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\mu}} = 5.16 \times 10^3 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{Ex.9})$$

6. Pour établir la relation de dispersion, cherchons la solution sous la forme d'une OPH : $\underline{u}(x,t) = u_0 e^{j(\omega t - kx)}$. En injectant dans l'équation de d'Alembert, on obtient :

$$-\omega^2 = c^2(-k^2) \iff k = \pm \frac{\omega}{c}$$

On peut traduire cette relation de dispersion en terme de longueur d'onde λ et de fréquence f : $\lambda = \frac{c}{f}$.

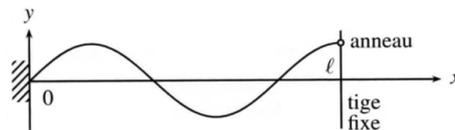
Dans l'audible, $f \in [20 \text{ Hz}, 20 \text{ kHz}]$, donc dans l'acier $\lambda \in [0.26 \text{ m}, 2.6 \times 10^2 \text{ m}]$.

7. La longueur caractéristique de variation de $u(x,t)$ est λ ! Il s'agit en effet de la période spatiale de $u(x,t)$. (Pour s'en convaincre, on peut aussi remarquer que $\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u}{\text{long. caract. variation}} = -j \frac{2\pi}{\lambda} u$.)

Ici, il est très clair que $\lambda \gg a \sim 1 \times 10^{-10} \text{ m}$. L'approximation des milieux continus est donc vérifiée a posteriori.

Ex. 4 Modes propres d'une corde avec une extrémité libre

Une corde est attachée à une de ses extrémités. Sa seconde extrémité est libre de se mouvoir sur un anneau qui coulisse sans frotter sur une tige. Le présence de la tige permet de tendre la corde sous une tension T . L'anneau est de masse quasi nulle.



1. (a) Quelle est la conditions à la limite en $x = 0$?
 (b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'anneau et en déduire la condition à la limite en $x = \ell$.
2. Quels sont les modes propres de cette corde ?

Correction de l'exercice 4

1. (a) En $x = 0$, on a la condition aux limites $y(0,t) = 0, \forall t$.
 (b) En $x = \ell$, on n'a aucune contrainte sur $y(\ell,t)$, par contre on en a une sur la vitesse. Appliquons le PFD sur l'anneau dans le référentiel terrestre galiléen, en le considérant de masse nulle :

$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{corde} \rightarrow \text{anneau}} + \vec{F}_{\text{tige} \rightarrow \text{anneau}} = \vec{T}(x = \ell) + F_{\text{tige} \rightarrow \text{anneau}} \vec{e}_x$$

La direction suivant \vec{e}_x de la force de la tige sur l'anneau se justifie par le fait que l'anneau glisse sans frottement : la réaction de la tige sur l'anneau est donc purement normale à la surface de la tige.

Quelle CL cela impose-t-il sur $y(x,t)$? On introduit (comme dans le cours) l'angle $\alpha(x,t)$ entre l'horizontale et la tangente à la corde en un point $M(x,y)$. En $x = \ell$ et à l'ordre 1 en α (petits mouvements transverses) :

$$\vec{T}(x = \ell, t) = T(x = \ell, t) \cos(\alpha) \vec{e}_x + T(x = \ell, t) \sin(\alpha) \vec{e}_y \simeq T(x = \ell, t) \vec{e}_x + T(x = \ell, t) \alpha(x = \ell, t) \vec{e}_y$$

Ainsi, on obtient nécessairement :

$$\alpha(\ell, t) = 0 = \frac{\partial y}{\partial x}(\ell, t)$$

2. On cherche une solution sous forme d'onde stationnaire :

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \Psi) \quad (\text{Ex.10})$$

Avec $y(0,t) = 0$, on a donc $\cos(\Psi) = 0$, soit $\Psi = \pm \frac{\pi}{2}$. Prenons $\Psi = -\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x = \ell, t) = Ak \cos(\omega t + \varphi) \cos(k\ell) = 0 \quad (\text{Ex.11})$$

soit $\cos(k\ell) = 0$, ce qui se traduit par $k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi, \omega = \frac{\pi c}{2\ell} + n \frac{\pi c}{\ell}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 5 Décomposition en modes de vibration pour une corde de guitare

Le problème de la corde vibrante de longueur L fixée en deux points et soumise à une déformation initiale est un problème très général en physique des ondes (cavité électromagnétique, laser, ...). On suppose qu'une corde vibrante vérifie l'équation de d'Alembert. On a montré que les modes propres forment une base de solutions de l'équation de d'Alembert. On cherche dans la suite, pour une corde fixée en ses deux extrémités, une solution de la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \sin(nkx) \quad (\text{Ex.12})$$

où $\omega = \frac{\pi c}{L}$ et $k = \frac{\pi}{L}$. Étudions le cas d'une corde de guitare pincée de sorte qu'à l'instant initial (α et β sont des constantes) :

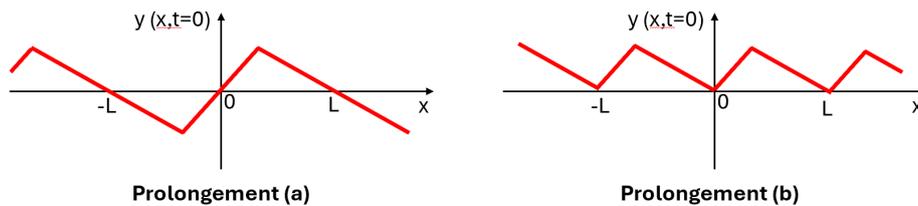
$$y(x,t=0) = \frac{\beta}{\alpha}x \quad \text{pour } x \in [0; \alpha L] \quad \text{et} \quad y(x,t=0) = \frac{\beta(L-x)}{1-\alpha} \quad \text{pour } x \in [\alpha L; L] \quad (\text{Ex.13})$$

On lâche la corde sans vitesse initiale $\frac{\partial y}{\partial t}(x,t=0) = 0$.

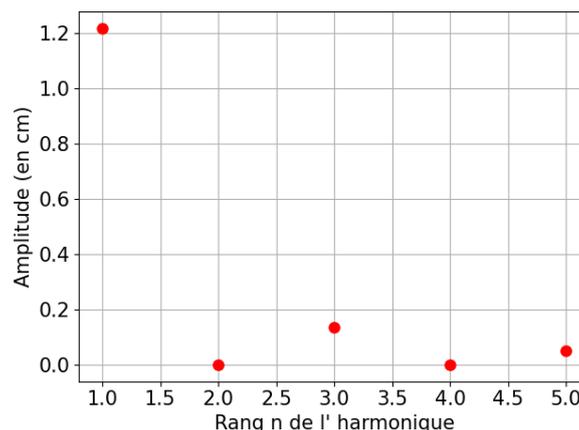
1. Montrer que, pour tout n , les coefficients b_n sont nuls.

On souhaite désormais déterminer les coefficients a_n . Pour cela, on va utiliser une décomposition en série de Fourier. Néanmoins, il est nécessaire que la fonction soit périodique pour la décomposer en série de Fourier. On va donc prolonger la fonction $y(x,t)$ sur l'intervalle spatial $]-\infty; +\infty[$.

On propose ci-dessous deux prolongements de la fonction $y(x,t=0)$.



2. En utilisant un argument de symétrie, déterminer quel prolongement de la fonction $y(x,t=0)$ convient pour pouvoir décomposer en série de Fourier sous la forme $y(x,t=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nkx)$.
3. Dans cette question, on s'intéresse au cas particulier où la corde est initialement pincée en son milieu ($\alpha = \frac{1}{2}$).



- (a) On donne ci-dessus le spectre en amplitude de la fonction prolongée $y(x,t=0)$ dans le cas où $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = 1.0$ cm (on peut par exemple calculer ce spectre à l'aide de fonctions Python). Donner les valeurs absolues des coefficients a_n . Que peut-on dire concernant les harmoniques paires ?
 - (b) Démontrer le résultat observé pour les harmoniques paires en remarquant que la fonction prolongée $y(x,t=0)$ vérifie la symétrie de glissement $y(x,t=0) = -y(x-L,t=0)$.
4. On admet que le calcul de a_n donne l'expression suivante : $a_n = \frac{2\beta L \sin(\alpha n\pi)}{\alpha(1-\alpha)n^2\pi^2}$. Quelle différence de timbre y a-t-il à jouer en pinçant la corde en son milieu plutôt qu'au dessus de la rosace de la guitare ?

5. Pour changer la note sur une même corde, disons la seconde corde du La à 110 Hz, un guitariste peut appuyer le doigt sur une case entre deux frettes. En se contentant d'effleurer la corde au quart de sa longueur, il peut également obtenir une nouvelle note correspondant au diapason de référence à 440 Hz. Expliquer pour chaque cas la raison du changement de hauteur de la note, en insistant sur la différence physique entre ces deux cas.

Correction de l'exercice 5

1. En utilisant la condition initiale de vitesse :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n k \sin(nkx) \quad (\text{Ex.14})$$

donc par unicité du développement en série de Fourier, $b_n = 0, \forall n$.

2. L'autre condition initiale sur la position de la corde conduit à :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nkx) \quad (\text{Ex.15})$$

Or une telle décomposition en série de Fourier signifie une fonction impaire du fait du sinus. Donc on prolonge la fonction $y(x, t = 0)$ de manière impaire sur $[-L; 0]$ (en traçant l'antisymétrique par rapport à l'axe $x = 0$), puis on la rend périodique pour pouvoir calculer la transformée de Fourier. Le prolongement correct est donc le prolongement (a).

3. (a) On lit sur le spectre : $a_1 = 1.2 \text{ cm}$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0.15 \text{ cm}$, $a_4 = 0$ et $a_5 = 0.05 \text{ cm}$. Les autres coefficients sont négligeables devant a_1 . Il semble que les harmoniques paires ne soient pas excitées lorsque la corde est pincée au milieu de sa longueur.
 (b) En utilisant le développement en série de Fourier, la symétrie de glissement donne :

$$\sum a_n \sin(nkx) = - \sum a_n \sin(nkx - n\pi) = \sum (-1)^{n+1} a_n \sin(nkx)$$

Par unicité du développement en série de Fourier, on en déduit que $\forall n, a_n = (-1)^{n+1} a_n$, ce qui implique, pour n pair, que $a_n = -a_n \iff a_n = 0$. On ne peut rien conclure de la symétrie de glissement pour n impair.

4. NB : pour calculer a_n , on se sert l'intégrale suivante : $a_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L y(x, t = 0) \sin(nkx) dx$.

Si on pince la corde en son milieu, on prend donc $\alpha = \frac{1}{2}$, donc $a_n = \frac{8\beta L \sin(n\frac{\pi}{2})}{n^2\pi^2}$, c'est-à-dire que l'on n'aura que les harmoniques impaires $n = 1, 3, 5, \dots$, alors qu'en jouant au dessus de la rosace de la guitare, on aura également les harmoniques paires (par exemple pour $\alpha = \frac{1}{4}$, le sinus ne s'annulera par exemple que pour $n = 4$, puis $n = 8$, etc).

5. Si on modifie la longueur de la corde, on va modifier les différents modes propres, ce qui explique le changement de hauteur. Tandis que si on effleure la corde au quart de sa longueur, tout en excitant la corde, on impose un nœud de position en ce point : on excite donc un mode qui n'est pas le fondamental à 110 Hz, mais les harmoniques compatibles avec ce nœud, en l'occurrence le mode $n = 4, n = 8$, etc. On a donc augmenté d'un facteur 4 la fréquence du son produit.