

Dispersion et absorption

Sommaire

| | |
|--|----------|
| I Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs | 2 |
| I.1 Propagation dans un plasma dilué | 2 |
| I.2 Propagation dans un conducteur ohmique | 4 |
| I.3 Synthèse sur le traitement des milieux conducteurs | 6 |
| II Généralités sur la dispersion et l'absorption | 7 |
| II.1 Sens physique des OPPH à vecteur d'onde complexe | 7 |
| II.2 Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif non absorbant | 8 |

Questions de cours

- Modèle du plasma dilué : hypothèses, équation de propagation et relation de dispersion. Commenter physiquement.
- Présenter la pseudo-onde électromagnétique plane progressive harmonique, où \underline{k} est complexe. Donner le sens physique associé à la partie réelle et à la partie imaginaire. Définition de l'indice optique complexe.
- Présenter la notion de paquet d'onde, donner un exemple. Préciser le lien entre largeur spectrale et largeur temporelle. Présenter l'effet de la dispersion, en discutant de la notion de vitesse de phase et vitesse de groupe.
- À partir de la relation de dispersion du plasma dilué $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, discuter selon la valeur de ω de l'effet d'un plasma dilué sur la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Application.
- Établir l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu conducteur. En déduire la relation de dispersion et l'expression du champ électrique à l'intérieur du conducteur. Interpréter.

Prise de notes : Qu'a-t-on vu jusqu'ici sur les ondes ?

1. Équation de d'Alembert apparait dans de nombreux domaines de la physique. À chaque fois, on a négligé tout phénomène de dissipation d'énergie (on a négligé la résistance à la déformation de la corde vibrante, on a négligé les frottements pour les vibrations dans un solide et on a étudié une onde EM dans le vide). Dans ce chapitre, on va prendre en compte les phénomènes de dissipation ! Donc on aura plus du d'Alembert. ABSORPTION
2. D'Alembert menait toujours à $k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow v_\varphi = c$, indépendant de ω . Ce ne sera pas le cas dans ce chapitre, et suivant leur fréquence, les ondes n'iront pas à la même vitesse dans le milieu. DISPERSION

Ce chapitre a quatre objectifs principaux :

1. Établir des relations de dispersion.
2. Dédire, de la relation de dispersion, la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
3. Distinguer la modélisation du plasma dilué de celle des conducteurs ohmiques.
4. Calculer $\langle \vec{\Pi} \rangle$ pour la propagation des ondes EM dans le plasma dilué et dans les conducteurs ohmiques, et l'interpréter.

I Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Dans cette partie, on étudie deux exemples de milieux conducteurs, c'est-à-dire des milieux où des cations et des électrons libres sont présents.

I.1 Propagation dans un plasma dilué

a Modélisation du plasma

Un plasma est un gaz ionisé globalement **neutre**, c'est-à-dire constitué d'ions positifs, qui résultent de la perte d'un ou plusieurs électrons par une molécule de gaz, et d'électrons qui leur ont été arrachés.

Un exemple fréquent de plasma est l'ionosphère, portion d'atmosphère terrestre entre 50 et 1000 km. Le gaz est ionisé par le rayonnement du Soleil. La pression atmosphérique y est inférieure à 2 Pa : le gaz est peu dense. La densité électronique résultante est autour de $n \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ m}^{-3}$: on parle de **plasma peu dense**.

Modèle adopté pour la propagation de l'onde EM dans le plasma :

1. On étudiera un plasma peu dense.
2. On envisage uniquement le cas de la propagation d'une onde électromagnétique transverse, de direction de propagation $+\vec{e}_x$:

★

En notation complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{avec} \quad \vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x = 0$$

Une conséquence directe de considérer des ondes transverses porte sur la densité volumique de charges :

$$\underline{\rho} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \varepsilon_0 (-j \vec{k}) \cdot \vec{E} = 0$$

Le plasma est donc aussi localement neutre.

b Conductivité du plasma

On cherche à exprimer le lien entre le vecteur densité de courant électrique complexe \vec{j} et le champ \vec{E} . On procède donc de manière similaire au chapitre EM1, en réalisant un raisonnement de type Drüde.

Modèle adopté pour la conductivité du milieu :

1.

Une charge quelconque du plasma (électron ou cation) subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \simeq q\vec{E} \quad (\text{I.1})$$

★

On ne garde que la force électrique, dans l'hypothèse où les électrons ne sont pas

relativistes, car $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1$.

2. La masse des cations étant beaucoup plus élevée que celle des électrons ($m_e/m_{proton} \sim 10^{-3}$!), on suppose les cations fixes dans notre étude.
3. Les électrons sont indépendants : ils n'interagissent pas les uns avec les autres.
4. Les électrons sont libres : aucune interaction électrostatique entre les électrons et les cations fixes.
- 5.

★

Enfin, et c'est la grande différence avec la conduction dans les métaux, on **néglige toute interaction entre les électrons et les cations**. En effet, le plasma étant peu dense, les collisions sont peu probables et ne permettent pas d'introduire une force de freinage.

On applique le PFD à un "électron moyen" dans le référentiel des cations fixes, supposé galiléen.

On se place en régime sinusoïdal forcé pour le vecteur vitesse : $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{j\omega t}$.

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \iff j\omega m_e \vec{v} = -e\vec{E} \iff \vec{j} = n(-e)\vec{v} = \frac{ne^2}{j\omega m_e} \vec{E} \quad (\text{I.2})$$

★

d'où une conductivité imaginaire pure $\underline{\gamma} = -j \frac{ne^2}{\omega m_e}$.

On peut alors en déduire la puissance volumique moyenne que le champ électromagnétique fournit aux électrons : $\mathcal{P}_{vol} = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$

On doit repasser en réels ! On suppose \underline{k} réel pour le calcul.

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{\omega m_e} \times e^{-j\frac{\pi}{2}} \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \Rightarrow \vec{j} = \frac{ne^2}{\omega m_e} \vec{E}_0 \underbrace{\cos(\omega t - \underline{k}x - \frac{\pi}{2})}_{= \sin(\omega t - \underline{k}x)}$$

★

Donc :

$$\mathcal{P}_{vol} = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{ne^2}{\omega m_e} \|\vec{E}_0\|^2 \langle \sin(\omega t - \underline{k}x) \cos(\omega t - \underline{k}x) \rangle = 0$$

Ainsi, une conductivité imaginaire pure implique que le champ n'échange aucune puissance avec les charges en moyenne.



c Équation de propagation

On peut combiner les équations de Maxwell, en utilisant $\vec{j} = \gamma \vec{E}$:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.3})$$

et l'on a toujours $\text{div } \vec{E} = 0$ et $\text{div } \vec{B} = 0$. D'où en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) \iff \text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (\text{I.4})$$

conduisant avec $\text{div } \vec{E} = 0$ à :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{I.5})$$

★ Commenter oralement

d Relation de dispersion

Rappel : Méthode systématique pour déterminer une relation de dispersion

1. Chercher la solution de l'équation d'onde sous la forme d'une onde plane progressive harmonique, et passer en notation complexe.
2. Après avoir injecté cette fonction d'onde dans l'équation d'onde, déterminer le lien entre ω et \underline{k} .

Exercice : Déterminer la relation de dispersion dans le cas d'une onde EM transverse dans un plasma peu dense.

On injecte la forme d'OPPH dans l'équation différentielle :

$$(-j \underline{k})^2 \vec{E} = \frac{(j\omega)^2}{c^2} \vec{E} - j\mu_0 \frac{ne^2}{\omega m_e} (j\omega) \vec{E} \iff k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \quad (\text{I.6})$$

★ que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (\text{I.7})$$

appelée **pulsation plasma**

Notons un ordre de grandeur pour l'ionosphère, avec $n \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$, on trouve $\omega_p \simeq 6 \times 10^7 \text{ rad/s}$, soit $f_p \sim 10 \text{ MHz}$.

La relation de dispersion obtenue n'est plus celle liée à une équation de d'Alembert, et fait plus intéressant encore, montre qu'il est indispensable de considérer \underline{k} complexe. En effet, pour $\omega < \omega_p$, $\underline{k}^2 < 0$, signe que \underline{k} est dans ce cas imaginaire pur !

I.2 Propagation dans un conducteur ohmique

a Conductivité d'un conducteur ohmique

De même que pour le plasma dilué, on cherche à exprimer le lien entre \vec{j} et \vec{E} .

Modèle adopté pour la conductivité du milieu :

1. À nouveau, on néglige la force magnétique de Lorentz agissant sur une charge devant la force électrique de Lorentz, tant que les charges ne sont pas relativistes.

2. La masse des cations étant beaucoup plus grande que celle des électrons, on suppose les cations fixes dans le référentiel d'étude.
3. Les électrons sont indépendants : pas d'interaction électron / électron.
4. Les électrons sont libres : pas d'interaction électrostatique électron / cation.
5. On considère des interactions électron / cation via des collisions (la densité électronique dans le cuivre $n \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}$). Drüde modélise ces interactions comme une force mésoscopique équivalente de freinage de type $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ avec m la masse d'un électron, \vec{v} sa vitesse et $\tau \sim 10^{-14} \text{ s}$ le temps caractéristique entre deux collisions dans un métal.
6. Du fait des collisions, le vecteur vitesse microscopique des électrons a une forte composante aléatoire. Pour se placer dans le cadre de la mécanique des milieux continus, on choisit alors de se placer à une échelle mésoscopique vérifiant $dt \gg \tau$ et $dx \gg l.p.m.$. Mais donc, sur ce système mésoscopique, il faut que le champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ puisse être considéré comme uniforme et stationnaire. Le champ \vec{E} doit vérifier :

$$T \gg \tau \iff f \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ Hz} \quad \text{et} \quad \lambda \gg l.p.m. \sim 10^{-8} \text{ m}$$

★ Champ \vec{E} avant le domaine optique (IR, micro-ondes, ondes radio)

On applique alors le PFD à un "électron moyen" dans le référentiel des cations fixes du réseau, supposé galiléen. On se place en régime sinusoïdal forcé de sorte que : $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{j\omega t}$.

$$j\omega m \vec{v} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} \iff \vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \frac{1}{1 + j\omega\tau} \vec{E} \iff \vec{j} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \vec{E}$$

★ avec $\gamma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$

Pour une onde EM de fréquence $f \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14} \text{ Hz}$, on considèrera que $\gamma = \gamma_0 \in \mathbb{R}$

b Modélisation du conducteur ohmique

Modélisation de la densité volumique de charges

L'équation de conservation de la charge doit être vérifiée dans le métal, ce qui impose la relation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \text{div } \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \rho \quad (\text{I.8})$$

★ En un point M fixé, l'intégration permet d'écrire $\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau'}}$ avec $\tau' = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} \simeq 10^{-18} \text{ s}$. L'échelle temporelle qui nous intéresse lors de l'étude des ondes est la période T de l'onde. Or, $T \gg \tau \gg \tau'$, ce qui signifie que la relaxation de la densité volumique de charge est toujours plus rapide que ce qui lui pourrait être imposée par le champ électrique.



Donc, en présence d'une onde électromagnétique de fréquence $f \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14}$ Hz, la densité volumique de charge est uniformément et constamment nulle :

$$\rho(M,t) = 0 \quad (\text{I.9})$$

conduisant à la simplification de l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = 0$.

Modélisation du vecteur densité de courant

Dans le but de simplifier l'équation de Maxwell-Ampère, on peut comparer le vecteur densité de courant électrique $\|\vec{j}\|$ et le terme $\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$:

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{1}{\omega \tau'} = \frac{1}{2\pi f \tau'} \gg 1 \quad (\text{I.10})$$

Donc l'équation de Maxwell-Ampère devient $\text{rot } \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}$.

c Équation de propagation

Exercice : À partir des approximations précédentes, déterminer l'EDP vérifiée par \vec{E} dans un conducteur ohmique.

Renoter toutes les équations de Maxwell avant de démarrer. On part de l'équation de Maxwell-Faraday, où on lui applique comme d'habitude l'opérateur rotationnel :

$$\star \quad \text{rot } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) \iff 0 - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \boxed{\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (\text{I.11})$$

On reconnaît là une équation de diffusion !

d Relation de dispersion

On cherche une solution sous la forme d'une OPPH : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$. On injecte dans l'équation de propagation :

$$\star \quad (-j\underline{k})^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 (j\omega) \vec{E} \iff \boxed{\underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega} \quad (\text{I.12})$$

À nouveau, la relation de dispersion n'est plus celle liée à l'équation de d'Alembert et montre que \underline{k} est complexe. Voyons donc quel sens donner à un vecteur d'onde complexe.

I.3 Synthèse sur le traitement des milieux conducteurs

| | Plasma dilué | Conducteur ohmique |
|---|--|--|
| Simplification des équations de Maxwell | $\star \operatorname{div} \vec{E} = 0$ $\star \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\star \operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\star \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \underline{\gamma} \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ | $\star \operatorname{div} \vec{E} = 0$ $\star \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\star \operatorname{div} \vec{B} = 0$ $\star \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \gamma_0 \vec{E}$ |
| Conductivité (cf. modèle type Drüde) | $\star \underline{\gamma} \in i\mathbb{R}$ | $\star \gamma = \gamma_0 \in \mathbb{R}$ |

II Généralités sur la dispersion et l'absorption

II.1 Sens physique des OPPH à vecteur d'onde complexe

a Pseudo-OPPH

Considérons une OPPH se propageant dans la direction $+\vec{e}_x$, mais avec un vecteur d'onde complexe :

$$\underline{k} = k_r(\omega) + j k_i(\omega) \quad (\text{II.1})$$

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - k_r x - j k_i x)} = \underline{\vec{E}}_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x)} \quad (\text{II.2})$$

\star soit encore en notations réelles :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{k_i(\omega)x} \cos(\omega t - k_r(\omega)x + \varphi_0) \quad (\text{II.3})$$

(Entourer la partie "atténuation" et "dispersion")

On parle parfois de pseudo-OPPH car l'amplitude dépend de la position (le champ n'évolue pas de manière sinusoïdale).

Vocabulaire : Quelle est la différence entre le terme "atténuation" et le terme "absorption" ?

\star On dit qu'il y a atténuation de l'onde lorsque l'amplitude du champ décroît de manière exponentielle avec la propagation. On dit qu'il y a absorption de l'onde lorsque cette atténuation est liée à un échange d'énergie entre l'onde et le milieu. Par exemple, dans un plasma dilué, il pourra y avoir de l'atténuation, mais pas de l'absorption (conductivité imaginaire pure).

b Partie réelle et vitesse de phase

Sur l'expression du champ électrique précédent, le terme en cosinus traduit le caractère progressif de l'onde, identique à celui d'une véritable OPPH se propageant selon $+\vec{e}_x$ si $k_r > 0$, et selon $-\vec{e}_x$ si $k_r < 0$, à la vitesse de phase

$$\star \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(\underline{k})} \quad (\text{II.4})$$

Remarque : Cette vitesse est celle de propagation d'un plan équi-phase d'équation $\omega t - k_r x + \varphi_0 = cste$.

Par rapport au cas d'une onde vérifiant une équation de d'Alembert, cette vitesse peut dépendre de ω : on dit dans ce cas que le milieu est **dispersif**.

c Partie imaginaire

Le terme en $e^{k_i x}$ traduit suivant le signe de k_i soit une atténuation, soit plus rarement une amplification de l'amplitude de l'onde dans l'espace. La situation la plus courante est celle d'une atténuation où $k_i < 0$. On introduit couramment une distance caractéristique d'atténuation (ou d'amplification) :

$$\delta = \frac{1}{|k_i|} \quad (\text{II.5})$$

Au final, on obtient une forme d'onde dans le cas d'une atténuation :

$$\star \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - k_r x + \varphi_0) = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right) + \varphi_0\right) \quad (\text{II.6})$$

Remarque : Notons que bien souvent, dans les milieux amplifiés, l'amplitude ne diverge pas car rapidement la modélisation linéaire n'est plus correcte pour de fortes amplitudes. Cela rend inopérant la recherche de solutions en pseudo-OPPH, car cette technique est réservée aux EDP linéaires.

d Indice optique complexe

Dans le cas d'un vecteur d'onde \vec{k} complexe, on généralise la notion d'indice optique.

On introduit l'indice optique complexe du milieu par $\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$. En décomposant $\underline{n} = n' + jn''$, il vient que

$$n' = \frac{k_r c}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi} \quad (\text{II.7})$$

caractérise la vitesse de propagation. Si $n' = f(\omega)$, il y a dispersion, d'où l'appellation d'**indice de dispersion** pour n' .

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - n' \frac{\omega}{c} x - jn'' \frac{\omega}{c} x + \varphi_0)} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_0 e^{n'' \frac{\omega}{c} x} \cos(\omega t - n' \frac{\omega}{c} x + \varphi_0)$$

n'' traduit alors l'atténuation d'une onde au passage dans le milieu, d'où l'appellation d'**indice d'extinction**.

Pour étudier un milieu diélectrique linéaire homogène et isotrope (DLHI) *non transparent*, il faut considérer $n'' \neq 0$ (et de signe négatif). Cela nous amènera à généraliser l'étude des coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre deux DLHI en prenant en compte des indices optiques complexes (cf. plus loin).

II.2 Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif non absorbant

Afin de dégager le sens physique de la dispersion, on envisage (dans cette sous-partie II-2 uniquement) la propagation de plusieurs pseudo-OPPH dans un milieu non absorbant mais dispersif, conduisant à $\underline{k} = k_r(\omega)$.

\star **Pourquoi faut-il forcément s'intéresser à une superposition d'OPPH à des pulsations différentes pour décrire une situation réelle ?** Le cas d'une seule OPPH n'est pas un modèle physique réel car toute onde réellement émise est d'extension limitée en temps et en espace.

a Préambule : superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines

Une première approche consiste à regarder la superposition de deux OPPH de fréquences voisines et de même amplitude, et d'observer l'effet de la dispersion :

$$s_1(x,t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k_r(\omega_1)x) \quad \text{et} \quad s_2(x,t) = s_0 \cos(\omega_2 t - k_r(\omega_2)x) \quad (\text{II.8})$$

On introduit $\Delta\omega_{1/2} = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2}$, $\Delta k_{r,1/2} = \frac{|k_r(\omega_2) - k_r(\omega_1)|}{2}$, et les pulsations centrales $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et $k_{r,0} = \frac{k_r(\omega_1) + k_r(\omega_2)}{2}$. On s'intéresse particulièrement au cas où $\omega_1, \omega_2 \gg \Delta\omega_{1/2}$ et $k_r(\omega_1), k_r(\omega_2) \gg \Delta k_{r,1/2}$.

La superposition de ces deux ondes conduit à :

★

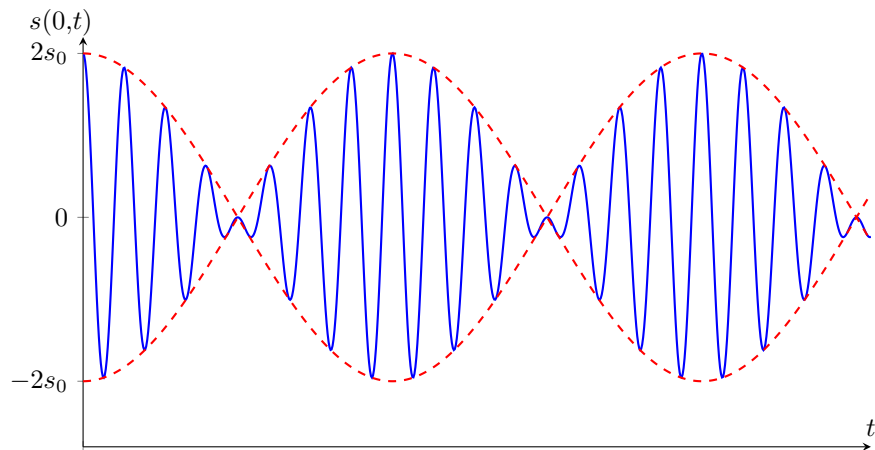
$$s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t) = 2s_0 \cos(\omega_0 t - k_{r,0}x) \times \cos(\Delta\omega_{1/2}t - \Delta k_{r,1/2}x) \quad (\text{II.9})$$

On en déduit l'allure du spectre et de la représentation temporelle du signal résultant :

Ecrire le signal $s(x,t) = 2s_0 \cos(\Delta\omega_{1/2}t - \Delta k_{r,1/2}x) \times \cos(\omega_0 t - k_{r,0}x)$ et entourer "enveloppe (BF)" et "porteuse (HF)". Tracer la représentation temporelle pas à pas. Placer le $\frac{2\pi}{\omega_0}$ et le $\frac{2\pi}{\Delta\omega_{1/2}}$

★

Spectre



On observe ici un phénomène de **battements** à la fois temporellement et spatialement. Le signal est formé :

- d'une onde moyenne, appelée **porteuse**, associée à la pulsation ω_0 et de module du vecteur d'onde $k_{r,0}$;
- "enveloppée" (ou modulée) par une **enveloppe** de pulsation $\Delta\omega_{1/2}$ et de vecteur d'onde $\Delta k_{r,1/2}$

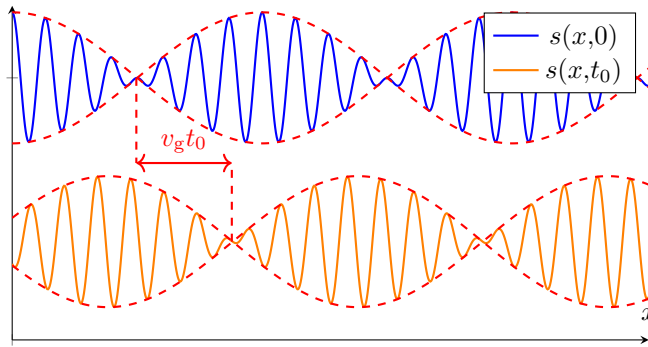
★

Si besoin, c'est très bien fait : simulation : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccessLibre/UM/Pedago/physique/O2/meca/vitgroupe.html> Demander la vitesse du point bleu et du point jaune juste après avoir traité le paragraphe suivant.

Si on regarde l'évolution spatiale à deux instants, on observe bien une propagation de l'onde. Mais deux vitesses distinctes semblent en jeu :

★

- la porteuse se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_{r,0}}$;
- l'enveloppe se propage à une vitesse différente appelée **vitesse de groupe** $v_g = \frac{\Delta\omega_{1/2}}{\Delta k_{r,1/2}}$.



★ *Prise de notes* : En général $v_g \neq v_\varphi$, et la simulation montre bien un déplacement relatif de la porteuse et de l'enveloppe.

b Notion de paquet d'onde

L'illustration précédente permet de définir les deux vitesses fondamentales à l'étude des ondes, mais la superposition de deux OPPH n'a toujours pas une vraie réalité physique car le signal résultant est toujours d'extension infinie dans l'espace et dans le temps...

On introduit alors le **paquet d'onde**, onde plane de **durée finie** constituée d'une superposition continue d'OPPH de pulsations voisines comprises dans l'intervalle $[\omega_0 - \Delta\omega_{1/2}; \omega_0 + \Delta\omega_{1/2}]$ avec $\Delta\omega_{1/2} \ll \omega_0$. Il prend la forme mathématique suivante :

★
$$\underline{s}(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega \quad (\text{II.10})$$

avec $\underline{a}(\omega)$ l'amplitude spectrale de l'OPPH de pulsation ω . Le graphique de $|\underline{a}(\omega)|$ en fonction de ω est alors le spectre en amplitude du signal.

Concrètement, ce paquet d'onde se présente comme une OPPH de pulsation ω_0 (et vecteur d'onde k_0) modulée par une enveloppe de **durée et d'extension spatiale limitées**.

Voici quelques exemples de spectres et de signaux temporels associés, qui ont été démontrés par des mathématiciens :

Tracer le spectre et l'allure temporelle de :

- ★
- Sinusoïde
 - Pic de Dirac temporel
 - Spectre gaussien, en explicitant les largeurs caractéristiques $\Delta\omega$ et $\Delta t = \frac{4}{\Delta\omega}$

Propriété de la transformée de Fourier

La théorie de Fourier permet d'établir, pour un paquet d'onde, le lien entre la largeur spectrale $\Delta\omega$ et la largeur temporelle Δt est donné par la relation :

★
$$\Delta\omega \Delta t \sim 1 \quad (\text{II.11})$$

Il en résulte que la largeur spectre est d'autant plus grande que le signal est bref, et inversement.

c Effet de la dispersion

i) Modélisation numérique de la propagation d'un paquet d'onde

On se propose de modéliser numériquement la propagation d'un paquet d'onde gaussien dans le plasma dilué, qui est un milieu avec la relation de dispersion $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$. On se place dans le cas d'un milieu dispersif, sans atténuation pour l'onde : on souhaite donc que $\underline{k} = k_r \in \mathbb{R}$. Cela revient à imposer que toutes les valeurs de ω du paquet d'onde vérifient $\omega > \omega_p$. On a sous ces

hypothèses : $k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$.

Reprenons alors la forme précédente du paquet d'onde, en réels, dans le cas où l'amplitude de

chaque composante suit une loi gaussienne :

$$s(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega \quad \text{avec} \quad a(\omega) = \tilde{a}_0 e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma^2}}$$

Remarque : Pour cette loi gaussienne, ω_0 est appelée pulsation centrale et σ écart-type de la gaussienne.

Simuler la propagation du paquet d'ondes revient seulement à représenter $s(x,t_k)$ en fonction de l'espace x pour différents instants t_k .

Problème : numériquement, on ne peut pas calculer l'intégrale précédente : on doit la transformer en une somme discrète finie.

Etape 1 : limiter les bornes de l'intégrale

Représenter $a(\omega)$. On se limite aux pulsations ω pour lesquelles $a(\omega)$ n'est pas négligeable devant \tilde{a}_0 : $s(x,t) = \int_{\omega_0-2\sigma}^{\omega_0+2\sigma} a(\omega) \cos(\omega t - kx) d\omega$

★

Etape 2 : discrétiser l'intégrale : méthode des rectangles

On discrétise l'intervalle $[\omega_0 - 2\sigma; \omega_0 + 2\sigma]$ en N valeurs notées ω_i . On applique alors la méthode des rectangles :

$$s(x,t) = \sum_{\omega_i} a(\omega_i) \cos(\omega_i t - k_i x) d\omega = \sum_{\omega_i} s_0 e^{-\frac{(\omega_i - \omega_0)^2}{2\sigma^2}} \cos(\omega_i t - k_i x)$$

avec $s_0 = \tilde{a}_0 d\omega = \text{cste}$.

ii) Implémentation en Python

Calculons cette somme à l'aide de Python. La première étape est de définir les paramètres du problème.

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 """ Parametres du plasma dilue """
5
6 omegap=6e7 # pulsation plasma (en rad/s)
7 c=3e8 # celerite OEM dans le vide (m/s)
8 omega0=8e7 # pulsation centrale du paquet d'onde (en rad/s)
9 sigma=5e6 # ecart-type du paquet d'onde gaussien (en rad/s)
10 N=100 # nombre de composantes dans le paquet d'onde
11 s0=1 # amplitude centrale du paquet d'onde gaussien (u.a.)

```

Ensuite, comme nous allons calculer la somme pour de nombreuses valeurs de x et de t , on se

propose de stocker les N valeurs de ω_i et les N valeurs de $s_0 e^{-\frac{(\omega_i - \omega_0)^2}{2\sigma^2}}$ dans un tableau numpy.

Exercice : Ecrire un code Python permettant de calculer un tableau numpy A de N lignes et 2 colonnes, tel que la première colonne contienne toutes les valeurs ω_i et la seconde contienne

toutes les valeurs $s_0 e^{-\frac{(\omega_i - \omega_0)^2}{2\sigma^2}}$. On rappelle que la fonction `np.zeros((n,p))` retourne un tableau numpy de n lignes et p colonnes rempli avec des 0 partout.

```

""" Construction du paquet d'onde """
""" A est un tableau contenant en colonne 1 les pulsations (rad/s) et en colonne 2
les amplitudes (ua)
★ A=np.zeros((N,2))
omeg=np.linspace(omega0-2*sigma,omega0+2*sigma,N)
A[:,0]=omeg
A[:,1]=s0*np.exp(-(omeg-omega0)**2/(2*sigma**2))

```

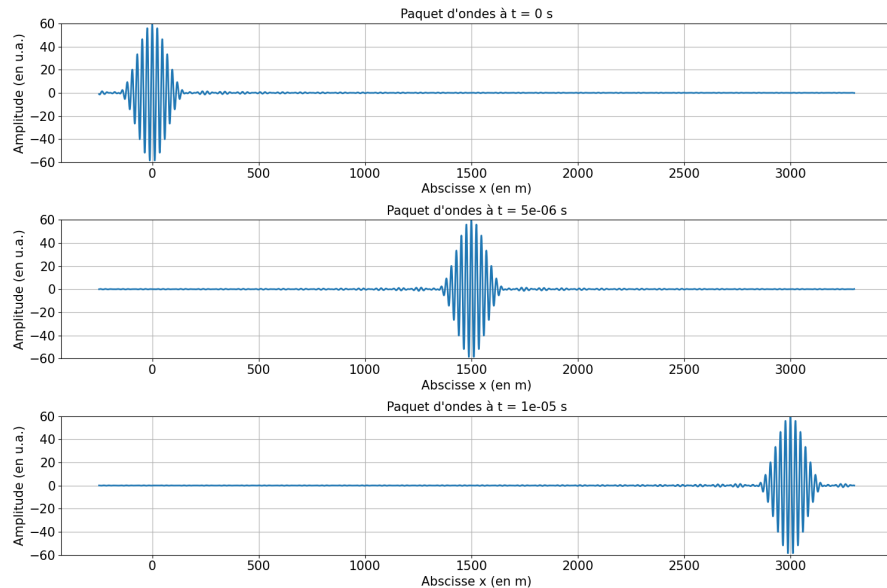
On peut désormais calculer la somme $s(x,t)$.

```
1 """ Propagation du paquet d'onde """
2
3 def disp(omega):
4     # Input : omega (rad/s)
5     # Output : k (/m)
6
7     return np.sqrt(omega**2-omegap**2)/c
8
9 def signal(x,t):
10    # Output [float ou array] : s(x,t) pour tous les x donnees
11
12    s=0
13    for i in range(0,N):
14        omega=A[i,0]
15        k=disp(omega)
16        s+=A[i,1]*np.cos(omega*t-k*x)
17    return s
```

En définissant la liste des abscisses x et des temps t_k souhaités, on peut finalement tracer $s(x,t_k)$.

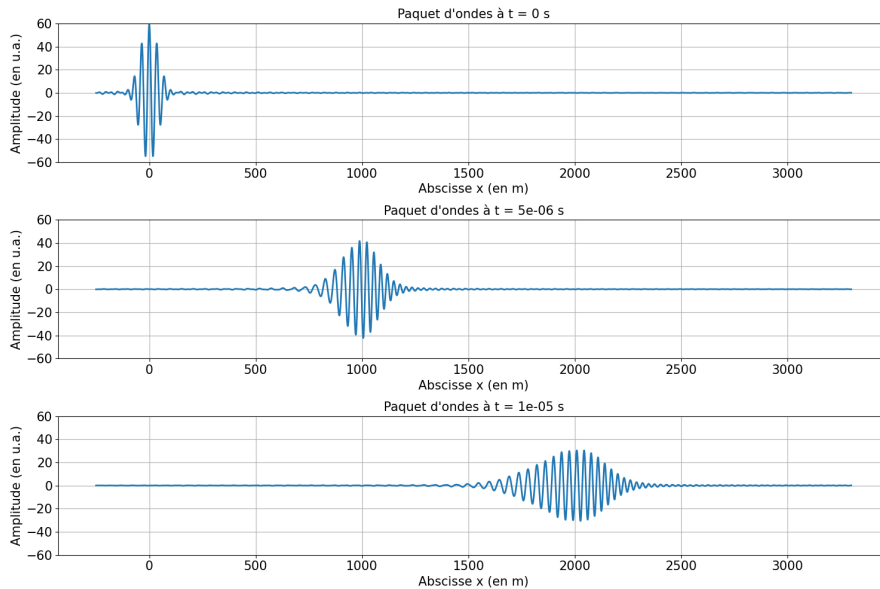
iii) Interprétations de la simulation

Cas d'un milieu non dispersif



Dans un milieu non dispersif, on observe une propagation en bloc du paquet d'onde, sans aucune déformation. En effet, comme la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, toutes les composantes d'OPPH qui composent le paquet d'onde se propagent à la même vitesse et se déplacent à la vitesse de groupe qui vaut la vitesse de phase.

Cas d'un milieu dispersif



Dans un milieu dispersif, comme chaque composante ne se déplace pas à la même vitesse, on observe une déformation du paquet d'onde au cours de sa propagation : en général on observe un étalement. L'enveloppe possède une vitesse de groupe a priori différente des vitesses de phase de chacune des OPPH du paquet d'onde.

Par analogie avec le raisonnement fait dans le cas de la superposition de 2 OPPH, on définit la vitesse de groupe du paquet d'onde par :



$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk_r} \right)_{\omega_0}$$

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation du maximum de l'enveloppe.

Remarque : Démontrons ce résultat à partir d'un développement mathématique au premier ordre autour de la pulsation centrale ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) \quad \text{et} \quad k_r(\omega) \simeq k_r(\omega_0) + \left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) = k_0 + \left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

On peut alors réécrire le paquet d'onde sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underline{s}(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \times e^{j\left((\omega - \omega_0)t - \left(\frac{dk_r}{d\omega}\right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)x\right)} d\omega \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left(t - \left(\frac{dk_r}{d\omega}\right)_{\omega_0} x \right)} d\omega = e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \text{Env} \left(t - \frac{x}{\left(\frac{d\omega}{dk_r}\right)_{\omega_0}} \right) \end{aligned}$$

Dispersion et absorption

III Application aux ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

III.1 Application au plasma dilué

Dans un plasma, on avait obtenu la relation de dispersion suivante :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (\text{III.1})$$

Selon la valeur de ω , \underline{k} est soit réel, soit imaginaire pur.

a Onde électromagnétique de haute fréquence : domaine de transparence

Étudions dans un premier temps le cas où $\omega > \omega_p$, i.e. $f > f_p \sim 10$ MHz. On suppose que l'onde se propage selon $+\vec{e}_x$.

Vitesse de phase et vitesse de groupe

$$k^2 > 0, \text{ donc } k \text{ est réel : } k = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} \text{ (+ car propagation selon } +\vec{e}_x)$$

On en déduit :

- Comme $k \in \mathbb{R}$, il n'y a pas d'atténuation dans le plasma. On dit que le domaine $\omega > \omega_p$ est le **domaine de transparence** du plasma.
- La vitesse de phase vaut :

★

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}$$

Donc, $v_\varphi(\omega)$: le plasma est dispersif.

- L'indice optique du plasma vaut $n = \frac{kc}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}$

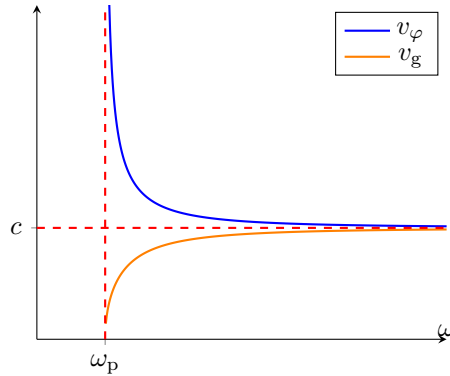
On observe que la vitesse de phase est toujours supérieure à la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide c . Cela ne pose aucun problème physique, étant donné qu'une OPPH est partout, à tout instant : ce n'est pas un modèle physique pertinent pour décrire la réalité et une OPPH ne peut pas transmettre d'information.

Le plus rapide pour obtenir la vitesse de groupe est de différencier la relation de dispersion :

★

$$2kdk = 2\omega \frac{d\omega}{c^2} \iff v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c \quad (\text{III.2})$$


Dans le cas du plasma dilué, la vitesse de propagation de l'enveloppe est la vitesse de propagation de l'énergie (on l'admet à notre niveau). Elle doit donc rester inférieure à c : c'est bien le cas.



Structure de l'onde

Dans le cas où $\omega > \omega_p$, on peut écrire l'expression du champ électrique et du champ magnétique. On suppose que la propagation se fait selon $+\vec{e}_x$ et que le champ \vec{E} est polarisé rectilignement selon \vec{e}_y .

$$\vec{E} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_y \Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_y$$

★  Pour déterminer \vec{B} , on repart systématiquement de la relation de structure sous la forme : $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$!
Ici : $k \in \mathbb{R}$, donc en réels :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_z$$

On peut alors calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\omega \mu_0} E_0^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \vec{e}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \vec{e}_x \neq \vec{0}$$

L'onde électromagnétique transporte bien de l'énergie si $f > f_p$.

b Onde électromagnétique de basse fréquence : domaine réactif

Étudions désormais le cas où $\omega < \omega_p$.

Structure de l'onde

$$k^2 < 0, \text{ donc } k_i = \pm \frac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c} \text{ et } k_r = 0.$$

On en déduit l'écriture du champ électrique (polarisé selon \vec{e}_y) :

$$\vec{E} = E_0 e^{j\omega t} \times e^{k_i x} \vec{e}_y$$

On ne garde alors que la solution physiquement acceptable $k_i < 0$. En réels :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t) \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad \delta = -\frac{1}{k_i} = \frac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}$$

★

On obtient une onde stationnaire, spatialement amortie sur une distance caractéristique δ . Le domaine $\omega < \omega_p$ est appelé **domaine réactif** du plasma.

On détermine le champ magnétique avec la relation de structure complexe :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(-\frac{j}{\delta} E_0 e^{j\omega t} e^{-\frac{x}{\delta}} \right) \vec{e}_z = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{e}_z$$

D'où :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\omega \delta} e^{-\frac{x}{\delta}} \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

Il vient alors que le vecteur de Poynting s'exprime :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\omega \delta} e^{-\frac{2x}{\delta}} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{e}_x \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$$

Cette onde ne se propage pas !!! Elle ne transporte, ni ne dissipe, aucune énergie (en moyenne). On parle d'onde évanescente.

Onde évanescente

Une onde évanescente est une onde stationnaire avec une atténuation spatiale exponentielle. Elle ne transporte aucune énergie en moyenne : on dit que l'onde ne se propage pas.

Dans le domaine réactif, l'indice optique complexe du plasma est :

$$\underline{n} = \frac{kc}{\omega} = -j \frac{c}{\omega \delta} = -j \sqrt{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 - 1}$$

c Application aux télécommunications

Exercice : On envoie une onde électromagnétique plane progressive et harmonique depuis la Terre vers l'ionosphère. On suppose que l'onde arrive en incidence normale sur l'ionosphère. Déterminer l'expression du coefficient de transmission en puissance à l'interface avec l'ionosphère, en fonction du domaine de pulsation de l'onde. On rappelle la valeur du coefficient de transmission en puissance dans le cas d'une interface entre deux milieux d'indices optiques réels (cf. chapitre 02) : $T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$.

Pour l'air, $n_1 \simeq 1$.

- Dans le domaine de transparence, l'indice optique du plasma n_2 est **réel**, donc

$$T = \frac{4n_2}{(1+n_2)^2} = \frac{4\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}}{\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}\right)^2}$$

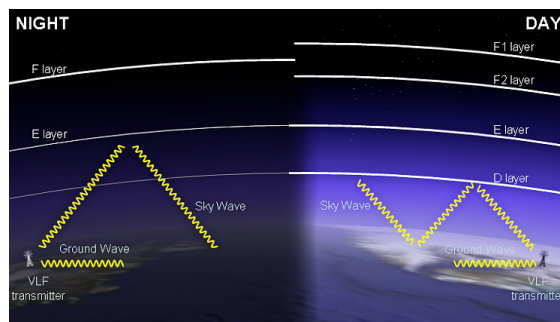
★

Il est intéressant de remarquer que $T \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow \omega_p$ et si on fait un DL, remarquer que le dénominateur vaudra environ 1 et au numérateur, on aura du $\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \simeq \frac{\sqrt{2\omega_p}}{\omega_p} \sqrt{\omega - \omega_p}$, donc croit comme une racine carrée.

- Dans le domaine réactif, l'indice optique est **imaginaire pur**, ce qui implique que \vec{B} et \vec{E} sont en quadrature et donc que $\langle \vec{\Pi}_t \rangle = \vec{0} : T = 0$.
Représenter graphiquement T en fonction de ω .

L'ionosphère se comporte alors comme un filtre passe-haut avec comme fréquence de coupure la fréquence plasma $f_p \sim 10$ MHz pour les ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques.

Il faut en tenir compte lors des procédés de télécommunications avec les satellites ou engins spatiaux (à haute fréquence), mais cela permet également à basse fréquence d'émettre à grande distance en utilisant la réflexion parfaite des OPPH sur l'ionosphère.



III.2 Application au conducteur ohmique

Dans un conducteur ohmique, on avait obtenu la relation de dispersion suivante :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma_0\omega$$

a Champ électrique dans le conducteur ohmique

Commençons par déterminer les valeurs possibles de la partie réelle k_r et de la partie imaginaire k_i de \underline{k} .

Deux moyens de procéder :

- $\underline{k}^2 = e^{-j\pi/2}\mu_0\gamma_0\omega \iff \underline{k} = \pm \frac{1-j}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$. Donc : $k_r = \pm \frac{1}{\delta}$ et

★

- $k_i = \mp \frac{1}{\delta}$
- $k_r^2 - k_i^2 = 0 \iff |k_r| = |k_i|$ et $2k_r k_i = -\mu_0\gamma_0\omega$. Donc : $k_i = -k_r$ et on obtient le même résultat.

Exercice : On considère que la propagation a lieu selon $+\vec{e}_x$. Déduire de ce qui précède :

- si le milieu est dispersif.
- l'expression du champ électrique réel \vec{E} dans le conducteur. Donner une interprétation physique de δ .

- l'expression de l'indice optique complexe du conducteur.

On ne garde donc que la solution $k_r > 0$ et $k_i < 0$.

- La vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \omega\delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma_0}} \quad (\text{III.3})$$

$v_\varphi(\omega)$: le milieu est dispersif.

- Le champ en notation complexe :

$$\vec{E} = \underline{E}_0 e^{j(\omega t - k_r x)} e^{k_i x} \vec{e}_y$$

★

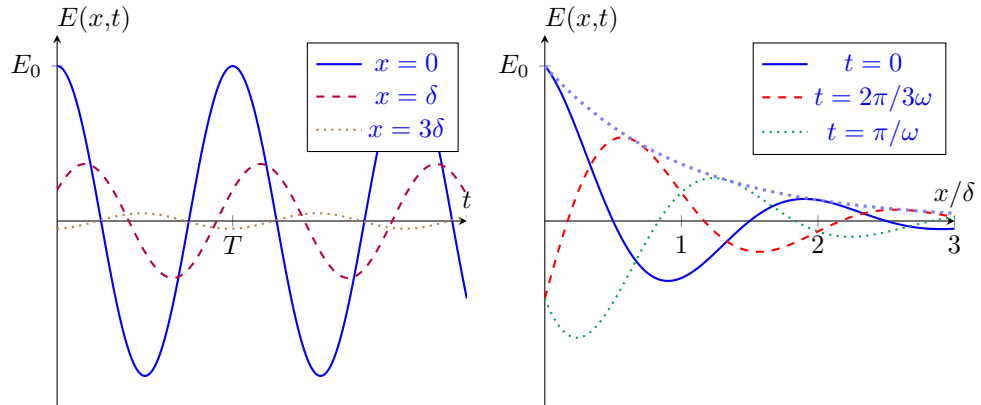
Donc :

$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi) \vec{e}_y$$

La longueur caractéristique d'atténuation $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma_0\omega}}$ est appelée l'épaisseur de peau. Le champ électrique est non nul sur une couche de taille de quelques δ , à proximité de l'interface avec l'air ou le vide. Il en va de même pour \vec{B} (cf. relation de structure) et pour \vec{j} (cf. loi d'Ohm locale).

$$\underline{n} = \frac{kc}{\omega} = (1-j)\frac{c}{\delta\omega} = (1-j)\sqrt{\frac{c^2\mu_0\gamma_0}{2\omega}} = (1-j)\sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varepsilon_0\omega}}$$

Il y a donc à la fois de l'absorption (dissipation d'énergie par effet Joule) et de la dispersion.



L'atténuation de l'onde est d'autant plus visible à haute fréquence, car l'épaisseur de peau décroît avec ω . Cela a quelques conséquences :

- pour le transport électrique à $f = 50$ Hz, des câbles en cuivre ont une épaisseur de peau de $\delta \sim 1$ cm : les champs électriques et magnétiques dans le câble vont se concentrer sur la périphérie du câble, d'où l'usage de câbles creux pour les lignes à hautes tensions ;
- pour l'émission d'ondes radio pour des fréquences allant jusqu'au GHz, on obtient $\delta \sim 5 \mu\text{m}$: une antenne creuse fera parfaitement l'affaire.

Remarque : Lors de l'étude électromagnétique des conducteurs ohmiques, on réalise souvent une modélisation simplifiée : celle du conducteur parfait. Dans cette modélisation $\gamma_0 \rightarrow +\infty$, donc $\delta \rightarrow 0$: les champs électrique et magnétique sont nuls à l'intérieur du conducteur parfait.

b Vecteur de Poynting associé

Calculons le champ magnétique à partir de l'expression du champ électrique, considéré suivant \vec{e}_y :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1-j}{\delta\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{j(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi)} \quad (\text{III.4})$$

soit en notant que $1 - j = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$, il vient en repassant aux notations réelles :

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}E_0}{\delta\omega} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_z \quad (\text{III.5})$$

Calculons alors la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{\delta\omega\mu_0} e^{-\frac{2x}{\delta}} \langle \cos(\omega t - x/\delta + \varphi) \cos(\omega t - x/\delta + \varphi - \pi/4) \rangle \vec{e}_x \quad (\text{III.6})$$

soit en développant le produit de cosinus, on montre que la valeur moyenne vaut $\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, d'où :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} e^{-\frac{2x}{\delta}} \vec{e}_x \quad (\text{III.7})$$

L'onde transporte donc de moins en moins d'énergie au fur et à mesure que l'on progresse dans le métal, ceci étant dû au fait que l'onde cède de l'énergie à la matière, dissipée ensuite par effet Joule. On peut par exemple prouver ce transfert d'énergie à la matière en calculant la puissance volumique moyenne cédée par le champ à la matière :

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = \gamma_0 \langle \|\vec{E}\|^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma_0 E_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}} > 0$$

IV Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux d'indices optiques complexes

On reprend le cadre du chapitre O2 : une (pseudo-)OPPH incidente, polarisée rectilignement selon \vec{e}_x et se propageant selon \vec{e}_z , arrive en incidence normale sur une interface située en $z = 0$ et séparant deux milieux d'indices optiques **complexes** \underline{n}_1 et \underline{n}_2 .

Exercice : Donner la forme sous laquelle on recherche les champs électriques et magnétiques incidents, réfléchis et transmis. On exprimera directement la forme de ces champs en fonction des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude \underline{r} et \underline{t} .

Il **faut** exprimer les champs sous formes complexes, car c'est le seul moyen de faire intervenir les coefficients \underline{r} et \underline{t} et de facilement prendre en compte des déphasages potentiels entre toutes les ondes. Faire un schéma pour s'aider !

$$\begin{aligned} \star \quad \vec{E}_i &= E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_x & \text{et} & \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_i}{\omega} = \frac{n_1}{c} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_y \\ \vec{E}_r &= \underline{r} E_0 e^{j(\omega t + \underline{k}_1 z)} \vec{e}_x & \text{et} & \quad \vec{B}_r = \frac{-\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{n_1 \underline{r}}{c} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_1 z)} \vec{e}_y \\ \vec{E}_t &= \underline{t} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_2 z)} \vec{e}_x & \text{et} & \quad \vec{B}_t = \frac{\vec{k}_2 \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{n_2 \underline{t}}{c} E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}_2 z)} \vec{e}_y \end{aligned}$$

avec $\underline{k}_1 = \underline{n}_1 \frac{\omega}{c}$ et $\underline{k}_2 = \underline{n}_2 \frac{\omega}{c}$ (définition des indices optiques complexes).

On admet que les champs électromagnétiques sont continus à l'interface $z = 0$. Cela donne les deux conditions aux limites qui permettent de déterminer \underline{r} et \underline{t} :

$$\begin{aligned} \forall t, \vec{E}_i(z=0, t) + \vec{E}_r(z=0, t) &= \vec{E}_t(z=0, t) & \Rightarrow & \quad 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ \forall t, \vec{B}_i(z=0, t) + \vec{B}_r(z=0, t) &= \vec{B}_t(z=0, t) & \Rightarrow & \quad \underline{n}_1 (1 - \underline{r}) = \underline{n}_2 \underline{t} \end{aligned}$$

La résolution du système conduit à :

$$\underline{r} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2}$$

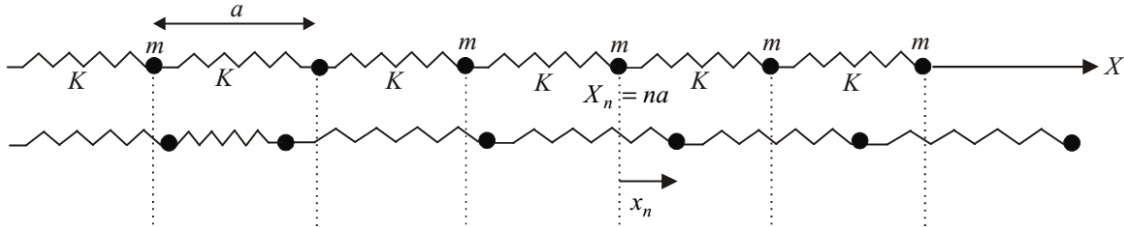
Interprétations :

- On retrouve (comme toujours) le fait que $\underline{r} = 0$ si et seulement si $\underline{n}_1 = \underline{n}_2$. Dès que les milieux de propagation ont des propriétés optiques différentes, il y aura réflexion partielle de l'onde. On peut d'ailleurs vérifier que si $\underline{n}_1 = \underline{n}_2$, alors $\underline{t} = 1$.
- Comme les indices optiques sont complexes, les coefficients \underline{r} et \underline{t} sont aussi a priori complexes non réels : les ondes réfléchies et transmises ont des amplitudes ET des déphasages différents de l'onde incidente.

Exercices

Ex. 1 Dispersion dans une chaîne 1D infinie d'atomes

Le problème qui suit est une modélisation (simpliste) des vibrations d'un réseau cristallin, et donc permet de décrire la propagation des vibrations dans un solide. On considère une chaîne infinie linéaire d'atomes ponctuels de masse m liés par des ressorts de raideur K . La chaîne est portée par l'axe (OX) ; à l'équilibre, les atomes occupent les positions $X = na$ avec $n \in \mathbb{Z}$ où a est la longueur à vide des ressorts.



- Établir l'équation différentielle régissant la position x_n de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre.
- On cherche des solutions sous la forme $\underline{x}_n = Ae^{j(\omega t - kna)}$, avec A une constante réelle. Démontrer la relation de dispersion $\omega(k) = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|$ avec ω_0 une constante à déterminer. Tracer le graphe $\omega(k)$. Montrer alors que la chaîne se comporte comme un filtre passe-bas dont on précisera la pulsation de coupure ω_c .

Au vu du graphe de la relation de dispersion déterminée, on se limitera dans toute la suite à $k \in \left[-\frac{\pi}{a}, +\frac{\pi}{a}\right]$.

- Simplifier la relation de dispersion lorsque $\omega = 2\omega_0$. Calculer x_n . Commenter.
- Simplifier la relation de dispersion lorsque $\omega \ll 2\omega_0$. Commenter. Déterminer alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde.
- Montrer que si $\omega \ll 2\omega_0$, alors $a \ll \lambda$ la longueur d'onde. Sous ces conditions, on peut alors passer à une description continue du problème. Déterminer l'équation d'onde vérifiée par la fonction continue $x(X,t)$, définie telle que $x(X = na, t) = x_n(t)$, et retrouver les résultats de la question précédente.

Correction de l'exercice 1

- Système : atome n . Référentiel du labo galiléen. BdF (le point délicat est le signe, comme d'habitude. Imaginer que x_n est positif et que $x_{n-1} = 0 = x_{n+1}$ et conclure) :
 - Force du ressort à gauche de n : $\vec{F}_g = -K(x_n - x_{n-1} - a)\vec{e}_x$
 - Force du ressort à droite de n : $\vec{F}_d = +K(x_{n+1} - x_n - a)\vec{e}_x$

Par la LQM appliquée à l'élément indicé n , on aboutit à :

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \omega_0^2 (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \tag{Ex.1}$$

en notant $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$.

- On injecte la forme de solution dans l'équation précédente :

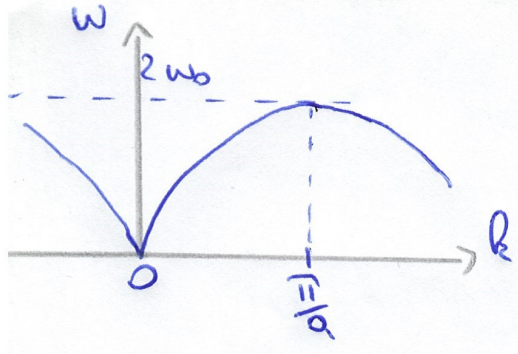
$$-\omega^2 \underline{x}_n = \omega_0^2 (e^{-ika} - 2 + e^{+ika}) \underline{x}_n \iff \omega^2 = \omega_0^2 (2 - 2 \cos(ka)) = 2\omega_0^2 (1 - \cos(ka)) \tag{Ex.2}$$

soit en l'écrivant sous la forme d'un carré :

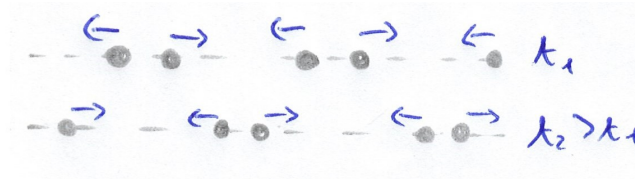
$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \times 2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \implies \boxed{\omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{ka}{2}\right) \right|} \tag{Ex.3}$$

On note qu'il s'agit d'une relation de dispersion non linéaire, on a donc nécessairement de la dispersion. On constate également que l'on peut se limiter à $k \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right]$ pour couvrir toutes les valeurs de ω et les deux sens possibles de propagation ($k > 0$ ou $k < 0$) (en cristallographie, on parle de "première zone de Brillouin").

Le tracé graphique (arche de sinus), conduit à une valeur maximale de fréquence de $\omega_c = 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$. On a donc bien affaire à un filtrage passe-bas !



3. Lorsque $\omega = \omega_c$, $k = \pm \frac{\pi}{a}$, donc $x_n = Ae^{i(\omega t \pm n\pi)}$, c'est-à-dire encore, en réel : $x_n(t) = A \cos(\omega t \pm n\pi) = \pm A \cos(\omega t)$. Chaque atome oscille donc à une pulsation $\omega_c = 2\omega_0$, et deux atomes plus proches voisins oscillent de manière alternée :



4. Lorsque $\omega \ll \omega_c$, on a alors $ka \ll 1$ (cf. le graphe, en se limitant à la 1ère zone de Brillouin, c'est-à-dire à l'excitation de longueur d'onde la plus grande et la plus simple à exciter en pratique). La relation de dispersion peut être approximée par $\omega \simeq \omega_c \frac{ka}{2} = \omega_0 ka$, c'est-à-dire la relation de dispersion associée à une équation de d'Alembert de célérité $\omega_0 a$. On a alors une OPH 1D : $x_n = A e^{j\omega(t - \frac{na}{\omega_0 a})}$. Les vitesses de phase et de groupe sont égales à $v_\varphi = v_g = \omega_0 a$.

5. Avec $\omega \ll 2\omega_0$, le graphe de la relation de dispersion conduit à $ka \ll 1 \iff \frac{2\pi a}{\lambda} \ll 1 \iff a \ll \lambda$. Si on reprend l'équation différentielle initiale, en posant $x(X = na, t) = x_n$, on peut reconnaître une dérivée seconde pour le terme de droite. Deux moyens de procéder :

- On effectue un DL à l'ordre 2 (a très petit devant la longueur caractéristique de variation de x) :

$$x_{n+1} = x(X = (n+1)a, t) = x(X = na, t) + \frac{\partial x}{\partial X} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} a^2$$

$$x_{n-1} = x(X = (n-1)a, t) = x(X = na, t) - \frac{\partial x}{\partial X} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} a^2$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} a^2$$

- On intuite le résultat en se rappelant de la méthode d'Euler approximant les dérivées par des différences finies. En notant que :

$$\frac{\partial x(X = na, t)}{\partial X} = \frac{x(na + \frac{a}{2}, t) - x(na - \frac{a}{2}, t)}{a}$$

En ré-applicant la même opération

$$\frac{\partial x(X = na + \frac{a}{2}, t)}{\partial X} = \frac{x((n+1)a, t) - x(na, t)}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x(X = na - \frac{a}{2}, t)}{\partial X} = \frac{x(na, t) - x((n-1)a, t)}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 x(na, t)}{\partial X^2} = \frac{x((n+1)a, t) - x(na, t) - (x(na, t) - x((n-1)a, t))}{a^2} = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{a^2}$$

Avec l'équation différentielle, on aboutit alors à :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} \quad (\text{Ex.4})$$

c'est-à-dire une équation de d'Alembert de célérité $c = \omega_0 a$. Les résultats usuels s'appliquent : $v_\varphi = v_g = c = \omega_0 a$.

Ex. 2 Corde vibrante verticale

Une corde vibrante verticale de masse linéique μ et de longueur $\ell \simeq 10$ m est suspendue par une de ses extrémités A , l'autre extrémité B étant libre. Au repos, A est fixe et la corde est verticale. On définit alors l'axe (Oz) vertical, orienté vers le bas, dont l'origine est en A . Lorsqu'on impose à l'extrémité A un déplacement $x_A = a_M \cos(\omega t)$, on constate que la corde se déforme avec une onde de déplacement $x(z,t)$ de pulsation ω , qui se propage et dont l'amplitude augmente quand on s'éloigne de A . Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme.

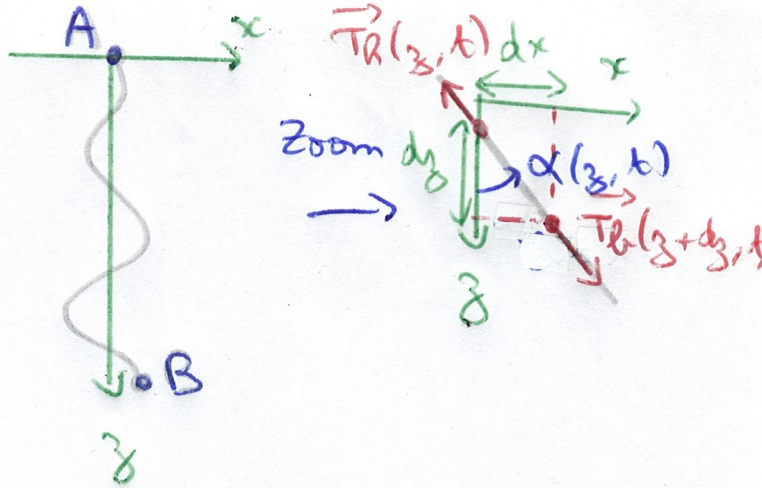
1. Montrer que la tension $T(z,t)$ dans la corde s'exprime par : $T(z,t) = \mu g(\ell - z)$.
2. En déduire que :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (\text{Ex.5})$$

Cette équation aux dérivées partielles est-elle linéaire ? A-t-on alors le droit de chercher la relation de dispersion en injectant une OPH complexe dans l'équation ?

3. On se place "au début" de la corde, ce qui permet de remplacer $\ell - z$ par ℓ dans le coefficient variable de l'équation précédente. Établir la relation de dispersion et interpréter l'observation.

Correction de l'exercice 2



1. Comme d'habitude quand on étudie une corde vibrante, on commence par présenter les hypothèses de modélisation :
 - On suppose que la corde est infiniment souple (aucune résistance à sa déformation) et qu'elle est quasi-inextensible (un point M se déplace à z fixé et la masse linéique reste constante).
 - On réalise une modélisation pour les petites déformations : $|\alpha(z,t)| \ll 1$. Tous les développements seront faits à l'ordre 1 en α .

Géométriquement, on établit que :

$$\tan(\alpha(z,t)) \simeq \alpha(z,t) = \frac{\partial x}{\partial z}$$

On étudie désormais une portion infinitésimale de corde, entre z et $z + dz$, dans le référentiel du labo galiléen. BdF :

- $\vec{T}_b(z + dz, t) = \vec{T}(z + dz, t)$
- $\vec{T}_h(z, t) = -\vec{T}_b(z, t) = -\vec{T}(z, t)$ avec le principe des actions réciproques
- $\vec{P} = \mu dz g \vec{e}_z$

Soit $T(z,t)$ la norme de $\vec{T}(z,t)$. On applique alors un PFD au système précédent :

$$\mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x = \vec{T}(z + dz, t) - \vec{T}(z, t) + \mu dz g \vec{e}_z = \frac{\partial \vec{T}}{\partial z} dz + \mu dz g \vec{e}_z \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x = \frac{\partial \vec{T}}{\partial z} + \mu g \vec{e}_z$$

On projette cette équation sur \vec{e}_z :

$$0 = \frac{\partial \vec{T} \cdot \vec{e}_z}{\partial z} + \mu g = \frac{\partial}{\partial z} (T(z,t) \cos(\alpha(z,t))) + \mu g \simeq \frac{\partial T}{\partial z} + \mu g$$

On en déduit :

$$T(z,t) = -\mu g z + f(t)$$

où la constante est a priori une fonction dépendant du temps. On détermine cette constante à l'aide d'une CL. La plus simple est en $z = \ell$:

$$T(z = \ell, t) = 0, \forall t \Rightarrow T(z, t) = T(z) = \mu g(\ell - z)$$

2. On reprend l'EDP précédente, que l'on projette cette fois suivant \vec{e}_x :

$$\mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{T} \cdot \vec{e}_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (\mu g(\ell - z) \sin(\alpha(z, t))) \simeq \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu g(\ell - z) \frac{\partial x}{\partial z} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

Cette EDP est linéaire, mais comme elle n'est pas à coefficients constants, on ne peut pas chercher une solution sous la forme d'une OPH complexe...

3. On a alors :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g\ell \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$$

Cette fois, on a une EDP linéaire à coefficients constants : on cherche une solution sous forme d'OPH complexe : $\underline{x} = A e^{j(\omega t - \underline{k}z)}$. On injecte :

$$-\omega^2 = +jg\underline{k} - g\ell \underline{k}^2 \iff \underline{k}^2 - j\frac{1}{\ell}\underline{k} - \frac{\omega^2}{g\ell} = 0$$

c'est une équation complexe, on peut calculer le discriminant $\Delta = -\frac{1}{\ell^2} + 4\frac{\omega^2}{g\ell}$. Ainsi si $\Delta > 0$, $\omega > \sqrt{\frac{g}{4\ell}}$, on a une solution complexe, sinon imaginaire pure (et donc une onde stationnaire : pas de propagation). En l'occurrence, on s'intéresse à une onde progressive et non stationnaire (l'observation ne décrit pas des nœuds).

Donc, on suppose que $\omega > \sqrt{\frac{g}{4\ell}}$:

$$\underline{k} = \frac{1}{2} \left(j\frac{1}{\ell} \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (\text{Ex.6})$$

soit une propagation avec amplification ($k_i > 0$) sur une distance caractéristique $\delta = 2\ell$, ce qui permet d'expliquer l'observation.

Ex. 3 Ondes longitudinales dans un plasma

On utilise le modèle du plasma peu dense et non relativiste mais on retire l'hypothèse localement neutre. On s'intéresse à la propagation d'ondes planes progressives harmoniques, de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ avec $\vec{k} = \underline{k} \vec{e}_x$.

1. Montrer que la non neutralité du plasma permet l'existence d'ondes longitudinales. Par la suite, on étudiera exclusivement ces ondes, on posera donc $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$.
2. Déterminer le champ magnétique d'une telle onde.
3. Exprimer la conductivité complexe du plasma. Commenter.
4. À l'aide de la relation précédente et d'une seconde relation entre \vec{E} et \vec{j} , déterminer l'équation vérifiée par \vec{E} .
5. Déterminer la relation de dispersion et commenter.
6. Calculer le vecteur de Poynting. Commenter.

Correction de l'exercice 3

1. Si on reprend l'équation de Maxwell-Gauss en complexe, on a bien $\rho = -\epsilon_0 j \vec{k} \cdot \vec{E}$. Donc un plasma localement non neutre permet l'existence d'ondes longitudinales, c'est-à-dire de direction \vec{k} .
2. On peut utiliser la relation de structure, car cette dernière est valable lorsqu'on prend une forme d'onde plane progressive harmonique, quelle que soit la direction du champ électrique. On aboutit alors à $\vec{B} = \vec{0} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ et donc en réel : $\vec{B} = \vec{0}$.
3. Comme dans le cours, on applique la LQM à un électron, dans le référentiel des cations supposés fixes, en posant $\vec{v} = \vec{v}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$:

$$m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} \implies m_e(j\omega) \vec{v} = -e \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = -n_e e \vec{v} = \frac{n_e e^2}{m_e(j\omega)} \vec{E}$$

La conductivité complexe du plasma peu dense est donc : $\underline{\gamma} = \frac{n_e e^2}{m_e j \omega}$, elle est imaginaire pure. On en déduit donc immédiatement (résultat de cours pouvant être donné) que le champ électromagnétique n'échange, en moyenne, aucune puissance avec les porteurs de charge du plasma.

4. On doit trouver une équation vérifiée par \vec{E} : on peut soit rester en notation complexe, mais sans simplifier les \vec{E} (sinon, on n'aura jamais une équation sur \vec{E} !), en laissant les $j\omega$ ensemble et enfin, repasser en réels ; soit repasser la loi d'Ohm locale en réels, et tout faire directement en réels. Je trouve la première méthode plus simple, je fais donc celle-ci.

- Loi d'Ohm locale : $\vec{j} = \underline{\gamma} \vec{E} = \frac{n_e e^2}{(j\omega) m_e} \vec{E}$
- On doit trouver une autre relation entre \vec{E} et \vec{j} : on utilise Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \vec{B} = \vec{0} \implies \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \implies \vec{j} + j\omega \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{0}$$

On rassemble les deux équations en complexes :

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_0 j\omega + \frac{n_e e^2}{m_e (j\omega)} \right) \vec{E} &= \vec{0} \\ \implies \left((j\omega)^2 \varepsilon_0 + \frac{n_e e^2}{m_e} \right) \vec{E} &= \vec{0} \\ \implies \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E} &= \vec{0} \end{aligned}$$

en introduisant la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$.

5. La relation de dispersion s'écrit alors $\omega^2 = \omega_p^2$ en remplaçant le champ dans l'équation. On a donc propagation d'ondes longitudinales dans le plasma quelle que soit la longueur d'onde, pourvu que l'on ait la bonne fréquence !
6. Comme le champ magnétique est nul, le vecteur de Poynting l'est aussi. Il n'y a pas de transport d'énergie.

Ex. 4 Onde EM dans l'eau de mer

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique de fréquence de l'ordre de 100 MHz à 10 GHz dans l'eau de mer. On admet que l'eau est localement neutre ($\rho = 0$). Sa permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ et sa conductivité $\sigma = 6,23 \text{ S.m}^{-1}$ sont supposées réelles.

1. Quel est le nom du domaine spectral de l'onde ?

On admet que dans ce milieu, il suffit de remplacer ε_0 par $\varepsilon_0 \varepsilon_r$ dans les équations de Maxwell. On donne la valeur de la permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ et de la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

2. Comparer la conductivité du cuivre à celle de l'eau de mer. Dans le cas de l'eau de mer, comparer le vecteur densité de courant $\|\vec{j}\|$ et le vecteur densité de courant de déplacement $\|\vec{j}_D\| = \left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$. Peut-on négliger l'un des deux termes dans le cas de l'eau de mer ?
3. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.
4. Établir la relation de dispersion suivante :

$$\underline{k}^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega \mu_0 \sigma$$

5. Déterminer l'ordre de grandeur de la pulsation à laquelle l'absorption commence à être négligeable devant la propagation. Quelle est alors la vitesse de phase en absence d'absorption ?
6. On considère désormais une onde de fréquence $f = 100 \text{ MHz}$.
- (a) (*Question calculatoire, admettre le résultat si besoin*) Montrer que la partie imaginaire k_i de \underline{k} s'écrit

$$k_i = \pm \sqrt{\sqrt{\Delta}/2 - \frac{\varepsilon_r \omega^2}{2c^2}} \quad \text{avec} \quad \Delta = \varepsilon_r^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 + \omega^2 \mu_0^2 \sigma^2$$

Choisir le signe de k_i en lien avec le sens physique.

- (b) Calculer la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase pour la fréquence $f = 100 \text{ MHz}$. Y a-t-il dispersion ? Pourquoi n'utilise-t-on pas d'ondes EM à cette fréquence pour les communications sous-marines ?

Correction de l'exercice 4

1. La gamme de longueurs d'onde est de 10 mm à 1 m, on est dans le domaine micro-ondes.
 2. La conductivité de l'eau de mer est bien plus basse que celle du cuivre ($\sigma(\text{Cu}) \sim 6 \times 10^7 \text{ S m}^{-1}$). En odg, on a :

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\|\vec{j}_D\|} \sim \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi f} \sim 0.1 \text{ à } 10$$

On ne peut pas négliger l'un des deux termes pour l'eau de mer. Cela va forcément modifier l'équation de propagation valable dans ce conducteur ohmique.

3. On a alors, en faisant comme d'ordinaire ($\text{rot rot} = \dots$) :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{Ex.7})$$

4. En injectant une solution sous forme d'OPPH $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}$, on trouve que la relation de dispersion est alors :

$$-k^2 = \frac{\varepsilon_r}{c^2}(-\omega^2) + j\omega\mu_0\sigma \iff k^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma \quad (\text{Ex.8})$$

5. La relation de dispersion fait intervenir une partie réelle qui prédomine à haute fréquence (pas d'atténuation) et une partie imaginaire à plus basse fréquence ($\propto \omega$) traduisant l'atténuation. Lorsque les deux termes sont du même ordre de grandeur :

$$\varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \sim \mu_0 \sigma \omega \iff \omega_c \sim \frac{\mu_0 c^2 \sigma}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (\text{Ex.9})$$

On trouve numériquement $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 1.4 \text{ GHz}$. Pour $f \gg f_c$, on a alors $k^2 = \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2}$ conduisant à $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 3.4 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$.

6. On identifie partie réelle et partie imaginaire dans l'équation précédente :

$$k_r^2 - k_i^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{Ex.10})$$

$$2k_r k_i = -\omega \mu_0 \sigma \quad (\text{Ex.11})$$

permettant d'en conclure que la partie réelle et la partie imaginaire sont de signe opposé. Calculons donc k_i en injectant l'expression de k_r :

$$\left(\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2k_i}\right)^2 - k_i^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \quad (\text{Ex.12})$$

On pose $X = k_i^2$, on aboutit à l'équation polynomiale suivante :

$$X^2 + \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} X - \frac{\omega^2 \mu_0^2 \sigma^2}{4} = 0 \quad (\text{Ex.13})$$

avec $\Delta = \varepsilon_r^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + \omega^2 \mu_0^2 \sigma^2 > 0$, d'où :

$$X = k_i^2 = -\frac{\varepsilon_r \omega^2}{2c^2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (\text{Ex.14})$$

sachant que $X \geq 0$, seule la solution avec + est valide, d'où :

$$k_i = \pm \sqrt{\sqrt{\Delta}/2 - \frac{\varepsilon_r \omega^2}{2c^2}} \quad (\text{Ex.15})$$

On choisit $k_i < 0$ pour avoir $k_r > 0$ (propagation dans le sens positif) et pour que la solution soit physiquement acceptable (pas d'amplification). Cela conduit bien à une atténuation de distance caractéristique $\delta = \frac{1}{|k_i|} =$

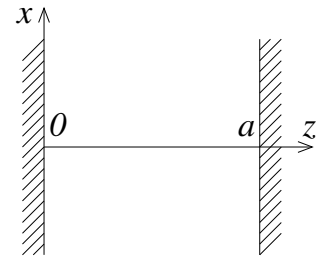
21 mm. On connaît alors $k_r = \frac{\omega \mu_0 \sigma}{2|k_i|} = 51.3 \text{ m}^{-1}$. Il y a dispersion car l'expression de k_i fait intervenir ω ,

donc la vitesse de phase dépend de ω . $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{2k_i}{\mu_0 \sigma} = 1.2 \times 10^7 \text{ m s}^{-1}$ pour $f = 100 \text{ MHz}$.

Il apparaît ainsi évident qu'on n'utilise pas ce type d'ondes pour les communications sous-marines, vu leur atténuation immédiate et la dispersion. On utilise plutôt des ondes acoustiques (sonar...).

Ex. 5 Cavité résonante

On s'intéresse à une cavité contenue entre deux plans parallèles infinis, taillée dans du cuivre entre $z = 0$ et $z = a$. La cavité est constituée de vide. On considère un champ électromagnétique \vec{E} existant dans cette cavité et qui est la superposition de deux OPPH de pulsation ω polarisées rectilignement selon \vec{e}_x et de sens de propagation opposés $\pm \vec{e}_z$: $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$.



On donne la valeur de la perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H/m.

1. Donner l'expression des champs \vec{E}_+ et \vec{E}_- (on pourra prendre une phase nulle en $t = 0$ et $z = 0$ pour \vec{E}_+).

On rappelle l'expression de l'épaisseur de peau dans un conducteur ohmique $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

2. Donner la signification physique de l'épaisseur de peau. Estimer un ordre de grandeur de δ pour une onde de fréquence 1 GHz. Comparer δ à l'épaisseur de la cavité électromagnétique $a = 10$ cm.

Le résultat précédent permet de supposer que le champ électromagnétique est nul à l'intérieur du cuivre. On admet qu'il y a continuité du champ électrique aux interfaces vide/cuivre.

3. Que doit valoir le champ \vec{E} en $z = 0$? En déduire une relation entre les amplitudes complexes de \vec{E}_+ et \vec{E}_- .
4. Montrer que seuls certains vecteurs d'onde discrets k_n peuvent exister. En déduire les longueurs d'onde λ_n et les fréquences f_n correspondantes. Commenter.
5. Donner l'expression du champ \vec{E} réel.
6. Tracer sur un même graphe l'allure de \vec{E} pour les 3 plus basses fréquences possibles, en un instant t fixé. Combien de nœuds et de ventres possède le mode numéro n ?
7. Exprimer le champ magnétique \vec{B} réel à l'intérieur de la cavité.

Correction de l'exercice 5

1. Pour le champ électrique dans le sens $+\vec{e}_z$: $\vec{E}_+ = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$ avec $k = \frac{\omega}{c}$ (relation de dispersion de d'Alembert), et par suite $\vec{E}_- = E_1 \cos(\omega t + kz + \varphi) \vec{e}_x$ où l'amplitude est *a priori* différente, et avec un déphasage.
2. L'épaisseur de peau représente la longueur caractéristique d'atténuation du champ électrique au sein d'un conducteur ohmique, du fait de la dissipation d'énergie par effet Joule. A.N. pour le cuivre avec $\gamma = 6 \times 10^7$ S m⁻¹ : $\delta = 2 \times 10^{-6}$ m $\ll a$. L'échelle spatiale intéressante pour la résolution du problème est la taille de la cavité (on cherche le champ dans la cavité) : à cette échelle spatiale, on peut négliger la présence d'un champ non nul dans le conducteur.
3. Les conducteurs imposent ainsi la nullité du champ électrique en $z = 0$ et $z = a$. En $z = 0$ cela impose, par continuité du champ électrique (en complexes) (attention, le champ magnétique n'est pas continu, du fait de courants surfaciques pouvant se développer) :

$$E_1 e^{j(\omega t + \varphi)} + E_0 e^{j\omega t} = 0, \forall t \iff E_1 e^{j\varphi} = -E_0 \quad (\text{Ex.16})$$

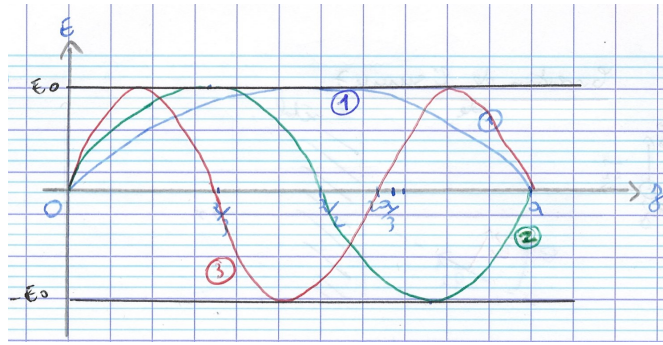
donc on peut prendre $E_1 = -E_0$ et $\varphi = 0$ (ou de manière équivalente $E_1 = E_0$ et $\varphi = \pi$).

4. En $z = a$, idem :

$$E_0 (e^{-jka} - e^{jka}) = 0, \forall t \implies \sin(ka) = 0 \iff ka = n\pi, n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{Ex.17})$$

conduisant à la quantification du vecteur d'onde $k_n = \frac{n\pi}{a}$, donc $f_n = \frac{nc}{2a}$ et $\lambda_n = \frac{2a}{n}$. On observe alors des modes propres à cette cavité, en particulier si on arrive à exciter cette cavité avec une onde de cette fréquence particulièrement, l'amplitude de l'onde dans la cavité va tendre vers l'infini (puis modélisation non linéaire à conduire).

5. On écrit le champ résultant $\vec{E} = E_0 (e^{j(\omega t - kz)} - e^{j(\omega t + kz)}) \vec{e}_x = -2jE_0 e^{j\omega t} \sin(kz) \vec{e}_x$, puis en passant en réels : $\vec{E} = 2E_0 \sin(\omega t) \sin\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \vec{e}_x$.



6. Pour le mode n , il y a n ventres et $n + 1$ nœuds.



7. Le champ électrique \vec{E} réel total n'est pas une OPPH, mais une onde stationnaire ! On ne peut pas appliquer la relation de structure sur ce champ.

Le champ électrique dans la cavité est la superposition de deux OPPH dans le vide. On applique la relation de structure pour chacune de ces OPPH :

$$\vec{B}_+ = \frac{k\vec{e}_z \wedge \vec{E}_+}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{B}_- = \frac{-k\vec{e}_z \wedge \vec{E}_-}{\omega} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kz) \vec{e}_y$$

Par théorème de superposition :

$$\vec{B} = \vec{B}_+ + \vec{B}_- = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \vec{e}_y = 2 \frac{E_0}{c} \cos(\omega_n t) \cos\left(\frac{n\pi z}{a}\right) \vec{e}_y$$

On observe que le champ magnétique n'est pas nul au niveau des bords de la cavité, bien au contraire, il y est maximal : les champs électrique et magnétique sont en quadrature de phase. Il n'y a pour autant aucun souci avec la modélisation effectuée, car le champ magnétique n'est pas continu à l'interface.

Ex. 6 Réflexion et transmission sur un plasma

Un plasma dilué avec des particules non relativistes occupe le demi-espace $x > 0$. Le reste du milieu est du vide ($x < 0$). Une onde plane progressive monochromatique incidente, de pulsation ω , polarisée rectilignement selon \vec{e}_z , se propage dans le sens des x croissants avec le vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$. Elle arrive en incidence normale sur le plasma. Une onde réfléchiée et une onde transmise sont alors créées. On donne les formes des champs électriques :

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_z \\ \vec{E}_r &= E_{r0} e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_z = E_r \vec{e}_z \\ \vec{E}_t &= E_{t0} e^{j(\omega t - k_p x)} \vec{e}_z = E_t \vec{e}_z \end{aligned}$$

1. Commenter ces écritures des champs. On donnera en particulier le lien entre ω et k .

On rappelle la relation de dispersion dans un plasma dilué avec une OPPH transverse :

$$k_p^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

avec ω_p la pulsation plasma, ne dépendant que des caractéristiques du plasma.

- On définit l'indice optique \underline{n} du plasma par $\underline{n} = \frac{ck_p}{\omega}$. Expliciter le sens physique associé à la partie réelle et la partie imaginaire de l'indice optique.
- On admet que le champ électromagnétique est continu à l'interface. Exprimer E_{r0} et E_{t0} en fonction de E_0 et \underline{n} .
- Établir les expressions réelles des trois champs électriques et des trois champs magnétiques dans le cas $\omega > \omega_p$. Les amplitudes seront exprimées en fonction de E_0 , \underline{n} et c .
- Définir et exprimer les coefficients de réflexion et de transmission en puissance R et T dans le cas $\omega > \omega_p$. Que vaut leur somme ?
- Dans le cas $\omega < \omega_p$, que vaut le module de $\frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}}$? On notera φ_n l'argument de ce complexe.
- Dans le cas $\omega < \omega_p$, établir les expressions réelles des champs électriques et magnétiques incidents et réfléchis.
- Calculer R dans le cas $\omega < \omega_p$. En déduire T . Commenter.

Correction de l'exercice 6

1. Comme d'habitude :

- \vec{E}_i et \vec{E}_t se propagent dans le sens des x croissants, d'où le $-kx$ dans les écritures des champs. C'est l'opposé pour \vec{E}_r .
- Polarisation selon \vec{e}_z , mais propagation selon \vec{e}_x .
- Même pulsation temporelle, car équations de Maxwell linéaires.
- Dans le vide (donc pour \vec{E}_i et \vec{E}_r), k et ω sont reliés par la relation de dispersion de d'Alembert : $k = \frac{\omega}{c}$.

2. En sup', l'indice optique a été défini comme le rapport de la vitesse de propagation dans le vide c sur la vitesse de propagation dans le milieu, pour la pulsation ω , c'est-à-dire sur la vitesse de phase v_φ . Donc :

$$\underline{n} = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{ck_p}{\omega}$$

si k_p est réel. Ici, la définition de l'indice optique généralise cette définition de sup', en permettant à l'indice optique d'être imaginaire pur si k_p est imaginaire pur.

3. La continuité des champs donne les deux CL en $x = 0$.

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(x=0,t) + \vec{E}_r(x=0,t) &= \vec{E}_t(x=0,t) \iff E_0 + E_{r0} = E_{t0} \\ \vec{B}_i(x=0,t) + \vec{B}_r(x=0,t) &= \vec{B}_t(x=0,t) \end{aligned}$$

Il faut, comme d'habitude, traduire la seconde CL sur \vec{E} : on utilise la relation de structure **en complexes**, car on a bien des OPPH. Cela donne :

$$\frac{k\vec{e}_x \wedge \vec{E}_i(x=0,t)}{\omega} + \frac{-k\vec{e}_x \wedge \vec{E}_r(x=0,t)}{\omega} = \frac{k_p\vec{e}_x \wedge \vec{E}_t(x=0,t)}{\omega} \iff \frac{E_0}{c} - \frac{E_{r0}}{c} = \frac{k_p}{\omega} E_{t0}$$

D'où :

$$E_0 - E_{r0} = \underline{n} E_{t0}$$

On en déduit, après calculs que :

$$E_{r0} = E_0 \times \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \quad \text{et} \quad E_{t0} = E_0 \times \frac{2}{1 + \underline{n}}$$

4. En utilisant les relations de structure, avec $\underline{k}_p = k_p \in \mathbb{R}$ et donc $\underline{n} = n \in \mathbb{R}$ (car $\omega > \omega_p$) :

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_i &= -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \\ \vec{E}_r &= \frac{1 - n}{1 + n} E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_r &= \frac{1 - n}{1 + n} \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx) \vec{e}_y \\ \vec{E}_t &= \frac{2}{1 + n} E_0 \cos(\omega t - k_p x) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_t &= -\frac{2n}{1 + n} \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k_p x) \vec{e}_y \end{aligned}$$

5. On peut donner directement les définitions des coefficients de réflexion et de transmission en terme de rapport des normes des vecteurs de Poynting $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(x=0,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0,t) \right\| \right\rangle} = \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^2 \\ T &= \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_t(x=0,t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0,t) \right\| \right\rangle} = \frac{4n}{(1 + n)^2} \end{aligned}$$

On trouve naturellement que $R + T = 1$ (conservation de la puissance totale).

Remarque : Ces résultats sont exactement ceux qu'on obtient en optique à l'interface entre deux diélectriques d'indices optiques 1 et n .

6. Si $\omega < \omega_p$, alors \underline{k}_p est imaginaire pur, et donc \underline{n} aussi. Par conséquent $1 - \underline{n}$ est le complexe conjugué de

$$1 + \underline{n} : \left| \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \right| = 1. \text{ On note alors : } \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} = e^{j\varphi_n}.$$

7. On reprend les résultats de la Q.3, en ajoutant le calcul du champ magnétique via la relation de structure dans le vide (car on cherche uniquement \vec{B}_i et \vec{B}_r) :

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_i &= -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \\ \vec{E}_r &= E_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_n) \vec{e}_z & \text{et} & & \vec{B}_r &= \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + kx + \varphi_n) \vec{e}_y\end{aligned}$$

8. Enfin, on recalcule le rapport R :

$$R = \frac{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_r(x=0, t) \right\| \right\rangle}{\left\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0, t) \right\| \right\rangle} = \frac{E_0^2/c \langle \cos^2(\omega t) \rangle}{E_0^2/c \langle \cos^2(\omega t + \varphi_n) \rangle} = 1$$

On en déduit $T = 1 - R = 0$. On vient de démontrer que dans le cas basse fréquence, un plasma se comporte comme un miroir parfait et réfléchit toute l'énergie incidente. Ceci est cohérent avec le fait qu'une onde évanescente existe pour $x > 0$, et qu'une onde évanescente ne transporte aucune énergie. On peut alors citer l'application de la 1ère communication transatlantique avec des ondes radio se réfléchissant sur l'ionosphère, par exemple.