Spé PC. Lycée Rabelais. Saint-Brieuc. Durée : 4 heures
Mercredi 18 décembre 2024.

Devoir de mathématiques en temps limité n° 4.

Exercice 1. Soit f une application continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$ converge absolument.

• On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,dt$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$ après avoir transformé I_n à l'aide d'un changement de variable approprié.

Exercice 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale généralisée $f(x)$ converge absolument.

2. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser l'intégrale $f'(x)$.

3. Montrer en intégrant par parties $f'(x)$ que f est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle du premier ordre.

4. *On admet que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Problème. • On rappelle que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin u| \leq |u|$.

• Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on pose : $h(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{e^t - 1}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note désormais : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,dt$.

2. Vérifier que f est impaire sur $\mathbb{R}$ et prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. a. Vérifier que pour tout $t > 0$, $\dfrac{1}{e^t - 1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$.

4. b. Montrer en utilisant un théorème d'intégration terme à terme que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$.

5. On pose : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

5. a. Prouver que l'intégrale généralisée $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

5. b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

5. c. Vérifier que pour tout $x > 0$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\,dt$ converge.

5. d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^x e^{-nt}\,dt = \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}}$.

5. e. Pour tout $\alpha > 1$, on note : $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Justifier simplement que ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.

5. f. Soit $x > 0$. Montrer avec un théorème d'intégration terme à terme que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\,dt = \Gamma(x+1)\,\zeta(x+1)$.
Indication : utiliser 4. a.

6. *DSE(0) de f sur* $]-1,1[$. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \zeta(2n+2) x^{2n+1}$.

Indication : utiliser le DSE(0) de la fonction sinus, 5. e, 5. d, et un théorème d'intégration terme à terme. .

Exercice 3. Soit E un ensemble. Une *involution* f de E est, par définition, une bijection de E sur E telle que $f^{-1} = f$. Si E est un ensemble fini à $n \in \mathbb{N}^*$ éléments, on note I_n le nombre d'involutions de E.

1. Calculer I_1, I_2 et I_3.

2. Considérons $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ où $n \geq 3$.

2. a. Montrer qu'il y a I_{n-1} involutions f de E telles que $f(1) = 1$.

2. b. Soit $j \in \{2, \ldots, n\}$. Montrer qu'il y a I_{n-2} involutions f de E telles que $f(1) = j$.

2. c. En déduire que $I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.

3. Par convention, $I_0 = 1$. On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!}x^n$, de la variable réelle x.

3. a. Justifier que son rayon de convergence est au moins égal à 1.

• Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n$.

3. b. Justifier que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) = (1 + x)f(x)$.

3. c. En déduire $f(x)$.

Exercice 4. `[Transmission d'un message binaire]` Soit $p \in]0, 1[$.

Des personnes E_0, E_1, …, E_n, … se transmettent soit le message "il pleut" soit le message "il ne pleut pas" de la manière suivante :

• E_0 transmet à E_1 le message "il pleut" ; et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la personne E_k transmet le message qu'elle a reçu de E_{k-1} à la personne E_{k+1} avec une probabilité égale à p ou bien le message contraire avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : « le message reçu par E_n est : "il pleut"» et $a_n = P(A_n)$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = (2p - 1)a_n + 1 - p$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer a_n en fonction de n et p. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 5. La probabilité qu'une pièce de monnaie tombe sur pile lorsqu'on la lance est égale à $p \in]0, 1[$.

On considère une succession de lancers supposés mutuellement indépendants de cette pièce.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, F_k (resp. P_k) est l'événement « on a obtenu face (resp. pile) lors du k ième lancer ».

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, B_n est l'événement : « il n'est jamais sorti 3 faces de suite lors des n premiers lancers » et $b_n = P(B_n)$.

On pose : $q = 1 - p$.

1. a. Calculer b_1, b_2, b_3.

1. b. Justifier que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite monotone et convergente.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4. Montrer en raisonnant sur la position du dernier pile obtenu que :

$$B_n = (B_{n-1} \cap P_n) \cup (B_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (B_{n-3} \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n).$$

En déduire que : $b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2b_{n-3}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

Exercice 6. Une urne contient quatre boules : une boule blanche et trois boules rouges.

On effectue au hasard des tirages successifs d'une boule dans cette urne, avec remise de la boule tirée, jusqu'à ce que l'on obtienne pour la première fois deux boules consécutives de même couleur, et on note alors X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k (resp. R_k) l'événement : « on obtient une boule blanche (resp. rouge) au k-ième tirage».

Exemple : $(X = 2) = (B_1 \cap B_2) \cup (R_1 \cap R_2)$.

1. Calculer $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.

2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P(X = 2m) = \frac{5}{8}(\frac{3}{16})^{m-1}$.

3. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $P(X = 2m + 1) = (\frac{3}{16})^m$.

4. Vérifier par calcul que $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

5. *Calcul de l'espérance de X.*

5. a. Justifier que $\forall x \in]-1, 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

5. b. Montrer que X admet une espérance égale à $\frac{35}{13}$.