Spé PC. Corrigé du devoir de mathématiques en temps limité n° 4 (18.12.2024).

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour tout $t \in [0,1]$, $f_n(t) = f(t^n)$.

i) `[CVS]` On distingue deux cas : si $t \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} t^n = 0$ et par continuité de f en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(t^n) = f(0)$; si $t = 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(1) = f(1^n) = f(1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(1) = f(1)$. Autrement dit, la suite de fonctions (continues) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction ϕ (continue par morceaux sur $[0,1]$) définie par : $\phi(t) = f(0)$ si $t \in [0,1[$ et $\phi(t) = f(1)$ si $t = 1$.

ii) `[Domination]` Comme f est continue sur $[0,1]$, f est bornée sur $[0,1]$. Il existe donc $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall u \in [0,1]$, $|f(u)| \le C$ $(*)$.
On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0,1],\ |f_n(t)| = |f(t^n)| \le C$$

(en considérant $(*)$ avec $u = t^n \in [0,1]$), la fonction (constante) $t \mapsto C$, ne dépendant pas de n, et étant clairement intégrable sur $[0,1]$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \phi(t)\,dt = \int_0^1 f(0)\,dt = f(0)$.

2. Effectuons le changement de variable : $x = t^n$ (ou $t = x^{\frac{1}{n}}$) dans l'intégrale $I_n(\varepsilon) = \int_\varepsilon^1 f(t^n)\,dt$.

Comme $dx = nt^{n-1}dt = n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}dt = nx^{1-\frac{1}{n}}\,dt$, on a : $I_n(\varepsilon) = \frac{1}{n}\int_{\varepsilon^{\frac{1}{n}}}^1 x^{\frac{1}{n}-1} f(x)\,dx$ puis, en faisant tendre ε vers 0^+, on obtient :

$$nI_n = \int_0^1 x^{\frac{1}{n}-1} f(x)\,dx.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons, pour tout $x \in]0,1]$, $g_n(x) = x^{\frac{1}{n}-1} f(x)$.

i) `[CVS]` La suite de fonctions (continues) $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction ψ (continue sur $]0,1]$) définie par :

$$\forall x \in]0,1],\ \psi(x) = \frac{f(x)}{x}$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{(\frac{1}{n}-1)\ln(x)} f(x) = e^{-\ln(x)} f(x) = \frac{f(x)}{x}$.

ii) `[Domination]` On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0,1]$, $|g_n(x)| \le \frac{|f(x)|}{x}$ car pour tout $x \in]0,1]$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{\frac{1}{n}} \le 1$, et la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, ne dépendant pas de n, est, par hypothèse, intégrable sur $]0,1]$.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx = \int_0^1 \psi(x)\,dx = \int_0^1 \frac{f(x)}{x}\,dx$.

Problème.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $t \mapsto h(x,t)$, continue sur $]0,+\infty[$, est intégrable sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire que $\int_0^{+\infty} |h(x,t)|\,dt$ converge.
Comme $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $|\sin\alpha| \le |\alpha|$, on a :

$$\forall t > 0,\ |h(x,t)| = \frac{|\sin(xt)|}{e^t - 1} \le |x|\,\frac{t}{e^t-1}\ (*)$$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\,dt$ existe car d'une part, $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{t}{e^t-1} = 1$, donc $u : t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $u(0) = 1$ et $\int_0^1 u(t)\,dt$ existe ; d'autre part, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 u(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^3 e^{-t} = 0$, donc $\int_1^{+\infty} u(t)\,dt$ existe. D'où la convergence par comparaison de fonctions positives de $\int_0^{+\infty} |h(x,t)|\,dt$ par $(*)$.

2. *i) Imparité de f.* Comme sin est impaire, f est impaire car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-xt)}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty} -\frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt = -f(x)$ par linéarité de l'intégrale.

ii) Continuité de f. Comme f est impaire, il suffit de prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. Les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre sont satisfaites car :

a. Pour tout $t > 0$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$,

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $]0,+\infty[$,

c. *Hypothèse de domination (locale)* : soit $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$. On a (cf. 1.) :

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[,\ |h(x,t)| = \frac{|\sin(xt)|}{e^t-1} \le \frac{xt}{e^t-1} \le \frac{bt}{e^t-1}$$

et $t \mapsto \frac{bt}{e^t-1}$, est continue sur $]0,+\infty[$, indépendante de x, et d'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{bt}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty} b\,u(t)\,dt$ convergente par 1.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$ (et donc sur $\mathbb{R}$) par le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

3. Vérifions les hypothèses du théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre afin de prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Tout d'abord, h est partiellement dérivable par rapport à x avec :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t\cos(xt)}{e^t-1}.$$

Les hypothèses a, b et c suivantes sont clairement vérifiées avec $A = \mathbb{R}$ et $I =]0,+\infty[$:

a. $\forall t \in I$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(\cdot,t) : A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A,

b. $\forall x \in A$, $h(x,\cdot) : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue (a fortiori par morceaux) et intégrable sur $I =]0,+\infty[$ d'après 1.,

c. $\forall x \in A$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,\cdot) : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue (a fortiori par morceaux) sur I.

Enfin l'hypothèse d. de «domination globale sur $\dfrac{\partial h}{\partial x}$» est satisfaite car :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[,\ |\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)| = \frac{t|\cos(xt)|}{e^t-1} \leq \frac{t}{e^t-1}$$

et on a déjà prouvé en 1. que $u : t \mapsto \dfrac{t}{e^t-1}$ (indépendante de x) est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On peut donc conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t\cos(xt)}{e^t-1}\,dt.$$

4. a. Rappelons que pour tout $a \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-a} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$. Soit $t > 0$. Alors $\underline{a = e^{-t} \in]0,1[}$ et par conséquent :

$$\frac{1}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = e^{-t}\cdot\frac{1}{1-e^{-t}} = e^{-t}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

4. b. D'après 4. a. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}\sin(xt)\,dt.$

Posons, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, $u_n(t) = e^{-nt}\sin(xt)$ et montrons que l'on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions intégrables (TITT) avec la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $]0,+\infty[$:

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$: $\forall t > 0$, $|u_n(t)| \leq e^{-nt}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt}\,dx$ converge (égale à $\frac{1}{n}$). Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,dt$ converge par comparaison de fonctions positives.

ii) Par définition de u_n et 4. a. la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers sa somme $t \mapsto h(x,t)$ (continue sur $]0,+\infty[$) car $\forall t > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = h(x,t)$.

iii) Prouvons que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,dt$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \geq 0$, on a : $|u_n(t)| = e^{-nt}|\sin(xt)| \leq |x|te^{-nt}$ $(*)$.

Or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2.\,te^{-nt} = \lim_{x\to+\infty} t^3e^{-nt} = 0$, donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt$ converge par le critère de Riemann en $+\infty$ et une intégration par parties montre plus précisement que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-nt}\,dt = \frac{1}{n^2}$. L'inégalité précédente $(*)$ conduit à

$$\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,dt \leq \int_0^{+\infty} |x|te^{-nt} = \frac{|x|}{n^2}$$

Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\,dt$ converge par comparaison à une série de Riemann convergente. Le théorème d'intégration terme à terme permet de conclure que $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (mais ce résultat a déjà été montré ci-dessus en 1.) et que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nt}\sin(xt)\,dt.$$

On montre pour finir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt}\sin(xt)\,dt = \frac{x}{n^2+x^2}$ en intégrant deux fois par parties ou en utilisant $e^{-nt}\sin(xt) = \mathrm{Im}\ (e^{(-n+ix)t})$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-nt}\sin(xt)\,dt &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \mathrm{Im}\ (e^{(-n+ix)t}\,dt) = \lim_{A\to+\infty}\mathrm{Im}\ (\int_0^A e^{(-n+ix)t}\,dt) \\
&= \mathrm{Im}\ (\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{(-n+ix)t}\,dt) = \mathrm{Im}\ (\lim_{A\to+\infty}[\frac{e^{(-n+ix)t}}{-n+ix}]_0^A) \\
&= \mathrm{Im}\ (\frac{1}{n-ix}\lim_{A\to+\infty}(1-e^{(-n+ix)A}))
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{(-n+ix)A} = 0$ car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}|e^{(-n+ix)A}| = \lim_{A\to+\infty} e^{-nA} = 0$ d'où

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt}\sin(xt)\,dt = \mathrm{Im}\ (\frac{1}{n-ix}) = \mathrm{Im}\ (\frac{n+ix}{n^2+x^2}) = \frac{x}{n^2+x^2}.$$

5. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $t > 0$, $v_x(t) = e^{-t}t^{x-1}$: $v_x \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[,]0,+\infty[)$, et $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $\Gamma_1(x) = \int_0^1 v_x(t)\,dt$ et $\Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} v_x(t)\,dt$ existent.

i) Existence de $\Gamma_1(x)$. On a : $v_x(t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$. Par la règle de l'équivalent positif et la convergence d'une intégrale de Riemann en

0, $\Gamma_1(x)$ existe ssi $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ existe ssi $1-x<1$ ssi $x>0$.

ii) Existence de $\Gamma_2(x)$ Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 v_x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$. Donc $\Gamma_2(x)$ existe pour tout réel x.

En conclusion, $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x>0$.

5. b. Classiquement $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{A\to+\infty} [-e^{-t}]_0^A = 1$.

Soit $A>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Intégrons par parties $\displaystyle\int_0^A t^n e^{-t}\,dt$ (cette intégrale n'est pas généralisée en 0) :

$$\int_0^A t^n e^{-t}\,dt = [t^n\cdot(-e^{-t})]_0^A + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}\,dt = -A^{n-1}e^{-A} + n\int_0^A t^{n-1}e^{-t}\,dt,$$

puis en faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ car, par croissances comparées, $\lim\limits_{A\to+\infty} A^{n-1}e^{-A} = 0$.

D'où $\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 6 = 3!$ et plus généralement (itérations ou récurrence) $\Gamma(n) = (n-1)!$.

5. c. Même raisonnement qu'en 5. a. Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons pour tout $t>0$, $w_x(t) = \dfrac{t^x}{e^t-1}$: $w_x \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[,]0,+\infty[)$, et

$K(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}\,dt$ existe si et seulement si $K_1(x) = \int_0^1 w_x(t)\,dt$ et $K_2(x) = \int_1^{+\infty} w_x(t)\,dt$ existent.

i) Existence de $K_1(x)$. On a : $w_x(t) \underset{t\to0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ car $e^t-1 \underset{t\to0^+}{\sim} t$. Par la règle de l'équivalent positif et la convergence d'une intégrale de Riemann en 0, $K_1(x)$ existe ssi $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ existe ssi $1-x<1$ ssi $x>0$.

ii) Existence de $K_2(x)$ Par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 w_x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} t^{x+1}e^{-t} = 0$. Donc $K_2(x)$ existe pour tout réel x.

En conclusion, $K(x)$ existe si et seulement si $x>0$.

5. d. Soient ε et A tels que $0<\varepsilon<A$. Le changement de variable : $s=nt$ dans $\displaystyle\int_\varepsilon^A t^x e^{-nt}dt$ conduit à :

$$\int_\varepsilon^A t^x e^{-nt}dt = \frac{1}{n}\int_{n\varepsilon}^{nA} (\frac{s}{n})^x e^{-s}ds = (\frac{1}{n})^{x+1}\int_{n\varepsilon}^{nA} s^x e^{-s}ds$$

et on obtient l'égalité demandée en faisant tendre ε vers 0^+ et A vers $+\infty$.

5. e. Soient α et β deux réels de $]1,+\infty[$ tels que $\alpha\le\beta$. On a : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $n^\alpha\le n^\beta$, $\dfrac{1}{n^\alpha}\ge\dfrac{1}{n^\beta}$, donc, pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \ge \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\beta}$, et enfin $\zeta(\alpha)\ge\zeta(\beta)$ en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente. Ainsi ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$.

5. f. D'après 4. a. pour tout $x\in\mathbb{R}$, $K(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} t^x e^{-nt}\,dt$.

Posons, pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $t>0$, $w_n(t) = t^x e^{-nt}$ et montrons que l'on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions intégrables (TITT) avec la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge1} w_n$ sur $]0,+\infty[$:

i) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $w_n\in\mathcal{C}^0([0,+\infty[,\mathbb{R})$ et w_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ par le critère de Riemann en $+\infty$ car

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 w_n(t) = \lim_{t\to+\infty} t^{x+2}e^{-nt} = 0$$

(par croissances comparées).

ii) Par définition de w_n et 4. a. la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge1} w_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers sa somme $t\mapsto\dfrac{t^x}{e^t-1}$ (continue sur $]0,+\infty[$) car $\forall t>0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(t) = \frac{t^x}{e^t-1}$.

iii) La série $\displaystyle\sum_{n\ge1}\int_0^{+\infty} |w_n(t)|\,dt$ converge. En effet, pour tout $t\ge0$, on a : $|w_n(t)| = w_n(t)$ et d'après 5. d. $\displaystyle\int_0^{+\infty} w_n(t)\,dt = \frac{\Gamma(x+1)}{n^{x+1}}$.

Comme $x+1>1$, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{x+1}}$ converge, de somme $\zeta(x+1)$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\ge1}\int_0^{+\infty}|w_n(t)|\,dt$ converge et a pour somme $\Gamma(x+1)\zeta(x+1)$.

Le théorème d'intégration terme à terme permet de conclure que $t\mapsto\dfrac{t^x}{e^t-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (mais ce résultat a déjà été montré ci-dessus en 5. c.) et que

$$K(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^x}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} w_n(t)\,dt = \Gamma(x+1)\zeta(x+1).$$

6. Pour tout $u\in\mathbb{R}$, $\sin u = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (DSE(0) de sin) donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $t>0$, $h(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!(e^t-1)}$ $(*)$

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!(e^t-1)}\,dt.$$

Posons, pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $t>0$, $f_{n,x}(t) = (-1)^n\dfrac{x^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!(e^t-1)}$. On peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions intégrables (TITT) avec la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge0} f_{n,x}$ sur $]0,+\infty[$ car les trois hypothèses suivantes sont satisfaites :

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n,x} \in \mathcal{C}^0(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et est intégrable sur $]0,+\infty[$ car d'après 5. c $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{e^t-1}\,dt$ existe (puisque $2n+1>0$) et d'après 5. f et 5. b :

$$\int_0^{+\infty} |f_{n,x}(t)|\,dt = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{e^t-1}\,dt = \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}\Gamma(2n+2)\zeta(2n+2) = |x|^{2n+1}\zeta(2n+2)\ (**).$$

ii) Par définition de $f_{n,x}$ et $(*)$ la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_{n,x}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers sa somme $t \mapsto h(x,t)$ (continue sur $]0,+\infty[$) car $\forall t>0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_{n,x}(t) = h(x,t)$.

iii) `On suppose désormais` $x \in]-1,1[$. Prouvons que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} |f_{n,x}(t)|\,dt$ converge.

Comme ζ est décroissante sur $]1,+\infty[$ (cf. 5. e.), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta(2n+2) \leq \zeta(2) (= \frac{\pi^2}{6})$ et d'après *i)* $(**)$ ci-dessus

$$\int_0^{+\infty} |f_{n,x}(t)|\,dt \leq \zeta(2)|x|^{2n+1}.$$

On déduit de cette comparaison de termes positifs que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty} |f_{n,x}(t)|\,dt$ converge car la série (géométrique) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}|x|^{2n+1}$ converge (de somme $\frac{|x|}{1-x^2}$).

Le théorème d'intégration terme à terme permet alors de conclure que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_{n,x}(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{e^t-1}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\zeta(2n+2)x^{2n+1}.$$

Exercice 6.

1. On a : $(X=3) = (R_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap R_2 \cap R_3)$. D'où $P(X=3) = P(R_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap R_2 \cap R_3)$ car $R_1 \cap B_2 \cap B_3$ et $B_1 \cap R_2 \cap R_3$ sont deux événements incompatibles. Et comme les événements R_1, B_2, B_3 (resp. B_1, R_2, R_3) sont mutuellement indépendants (tirages avec remise), on obtient :

$$P(X=3) = P(R_1)P(B_2)P(B_3) + P(B_1)P(R_2)P(R_3) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{16}.$$

Idem $(X=4) = (B_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap B_4) \cup (R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap R_4)$. D'où, par incompatibilité et indépendance mutuelle,

$$P(X=4) = P(B_1)P(R_2)P(B_3)P(B_4) + P(R_1)P(B_2)P(R_3)P(R_4) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^3 + \frac{1}{4}(\frac{3}{4})^3 = \frac{30}{216} = \frac{15}{128}.$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$(X=2m) = (B_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap B_{2m-3} \cap R_{2m-2} \cap B_{2m-1} \cap B_{2m}) \cup (R_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap R_{2m-3} \cap B_{2m-2} \cap R_{2m-1} \cap R_{2m}).$$

D'où, par incompatibilité et indépendance mutuelle,

$$\begin{aligned} P(X=2m) &= P(B_1)P(R_2)\cdots P(B_{2m-3})P(R_{2m-2})\cdot P(B_{2m-1})P(B_{2m}) + P(R_1)P(B_2)\cdots P(R_{2m-3})P(B_{2m-2})\cdot P(R_{2m-1})P(R_{2m}) \\ &= \underbrace{(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4})\cdots(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4})}_{m-1 fois}\cdot(\frac{1}{4})^2 + \underbrace{(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4})\cdots(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4})}_{m-1 fois}\cdot(\frac{3}{4})^2 = (\frac{3}{16})^{m-1}\cdot(\frac{1}{4})^2 + (\frac{3}{16})^{m-1}\cdot(\frac{3}{4})^2 = \frac{5}{8}(\frac{3}{16})^{m-1}. \end{aligned}$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On a de même :

$$(X=2m+1) = (R_1 \cap B_2 \cap R_3 \cap \cdots \cap B_{2m-2} \cap R_{2m-1} \cap B_{2m} \cap B_{2m+1}) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap R_{2m-2} \cap B_{2m-1} \cap R_{2m} \cap R_{2m+1}).$$

D'où, par incompatibilité et indépendance mutuelle,

$$\begin{aligned} P(X=2m+1) &= P(R_1)P(B_2)P(R_3)\cdots P(B_{2m-2})P(R_{2m-1})P(B_{2m})P(B_{2m+1}) + P(B_1)P(R_2)P(B_3)\cdots P(R_{2m-2})P(B_{2m-1})P(R_{2m})P(R_{2m} \\ &= \frac{3}{4}\underbrace{(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4})\cdots(\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4})}_{m-1 fois}\cdot(\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{4}\underbrace{(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4})\cdots(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4})}_{m-1 fois}\cdot(\frac{3}{4})^2 = (\frac{3}{16})^m\frac{1}{4} + (\frac{3}{16})^m\frac{3}{4} = (\frac{3}{16})^m. \end{aligned}$$

4. Les deux séries $\displaystyle\sum_{m\geq 1} P(X=2m)$ et $\displaystyle\sum_{m\geq 1} P(X=2m+1)$ convergent et :

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} P(X=n) &= \sum_{m=1}^{+\infty} P(X=2m) + \sum_{m=1}^{+\infty} P(X=2m+1) \\ &= \frac{5}{8}\sum_{m=1}^{+\infty}(\frac{3}{16})^{m-1} + \sum_{m=1}^{+\infty}(\frac{3}{16})^m \\ &= \frac{5}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3}{16})^k + \frac{3}{16}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3}{16})^k \\ &= \frac{13}{16}\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{3}{16})^k = \frac{13}{16}\frac{1}{1-\frac{3}{16}} = 1. \end{aligned}$$

5. a. La somme f de la série entière $\sum_{n\geq 0} x^n$, de rayon de convergence 1, est, d'après le cours, (indéfiniment) dérivable terme à terme sur $]-1,1[$. Comme $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, on a donc : $\forall x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

5. b. Posons $u_n = nP(X=n)$, $n \geq 2$. D'après 5. a. les deux séries $\sum_{m\geq 1} u_{2m}$ et $\sum_{m\geq 1} u_{2m+1}$ convergent avec :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} u_{2m} = \sum_{m=1}^{+\infty} 2mP(X=2m) = \frac{5}{4}\sum_{m=1}^{+\infty} m(\frac{3}{16})^{m-1} = \frac{5}{4}\frac{1}{(1-\frac{3}{16})^2}$$

et

$$\sum_{m=1}^{+\infty} u_{2m+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} (2m+1)P(X=2m+1) = \sum_{m=1}^{+\infty} (2m+1)(\frac{3}{16})^m = \frac{3}{8}\sum_{m=1}^{+\infty} m(\frac{3}{16})^{m-1} + \sum_{m=1}^{+\infty} (\frac{3}{16})^m = \frac{3}{8}\frac{1}{(1-\frac{3}{16})^2} + \frac{3}{16}\frac{1}{(1-\frac{3}{16})}.$$

D'où la convergence de la série (à termes positifs) $\sum_{n\geq 2} u_n$, dont la somme est l'espérance de X :

$$E(X) = \sum_{m=1}^{+\infty} u_{2m} + \sum_{m=1}^{+\infty} u_{2m+1} = \frac{13}{8}\frac{1}{(1-\frac{3}{16})^2} + \frac{3}{16}\frac{1}{(1-\frac{3}{16})} = \frac{32}{13} + \frac{3}{13} = \frac{35}{13}.$$