Spé PC. Corrigé du devoir de mathématiques en temps limité n° 4 (18.12.2024).

Exercice 4.

1. Comme $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet d'évènements, on a : $A_{n+1} = (A_{n+1} \cap A_n) \cup (A_{n+1} \cap \overline{A_n})$.
Les deux évènements $A_{n+1} \cap A_n$ et $A_{n+1} \cap \overline{A_n}$ étant incompatibles, on a donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= P(A_{n+1}) = P(A_{n+1} \cap A_n) + P(A_{n+1} \cap \overline{A_n}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= a_n\, p + (1-a_n)(1-p) = (2p-1)a_n + 1 - p. \end{aligned}$$

Remarque. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique.

2. Notons f la fonction affine $x \mapsto (2p-1)x + 1 - p$. On vérifie que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une unique solution $x = \frac{1}{2}$, autrement dit que $\frac{1}{2}$ est l'unique point fixe de f. En effectuant par exemple la soustraction membre à membre des deux égalités $a_{n+1} = f(a_n)$ et $\frac{1}{2} = f(\frac{1}{2})$, on obtient :

$$a_{n+1} - \frac{1}{2} = f(a_n) - f(\frac{1}{2}) = (2p-1)(a_n - \frac{1}{2}).$$

La suite $((a_n - \frac{1}{2}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite géométrique de raison $2p-1$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}(a_1 - \frac{1}{2})$, c'est-à-dire :

$$a_n = \frac{1}{2}((2p-1)^{n-1} + 1)$$

car, par hypothèse, $a_1 = P(A_1) = 1$. Comme $p \in]0,1[$, on a : $-1 < 2p-1 < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(2p-1)^n = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5.

1. a. Il est évident que l'on ne peut pas obtenir 3 faces de suite si on ne lance la pièce qu'une seule fois ou deux fois, d'où $b_1 = b_2 = 1$.
Comme $\overline{B_3}$ est l'évènement « il est sorti 3 faces de suite lors des 3 premiers lancers », on a donc $\overline{B_3} = F_1 \cap F_2 \cap F_3$, et par indépendance supposée des lancers, $b_3 = P(B_3) = 1 - P(\overline{B_3}) = 1 - (1-p)^3 = 1 - q^3$.

1. b. S'il n'est jamais sorti 3 faces de suite lors des $n+1$ premiers lancers, alors il n'est jamais sorti 3 faces de suite lors des n premiers lancers, autrement dit $B_{n+1} \subset B_n$ et donc $b_{n+1} \leq b_n$: la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante. Cette suite étant minorée par 0 car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = P(B_n) \in [0,1]$, elle converge par le théorème de la limite monotone vers une limite réelle $\ell \in [0,1]$.

2. *i*) Procédons par étapes pour montrer l'égalité des évènements demandée :

a) Tout d'abord, $\{P_n, F_n\}$ étant un système complet d'évènements, on a : $B_n = (B_n \cap P_n) \cup (B_n \cap F_n)$.

b) De plus, $B_n \cap P_n = B_{n-1} \cap P_n$. En effet, comme $B_n \subset B_{n-1}$, $B_n \cap P_n \subset B_{n-1} \cap P_n$ et réciproquement si les évènements B_{n-1} et P_n sont réalisés, il n'est donc jamais sorti 3 faces de suite lors des $n-1$ premiers lancers et on n'a pas obtenu 3 faces de suite *à l'issue* du n-ème lancer car cela voudrait dire que les 3 derniers lancers seraient F_{n-2}, F_{n-1}, F_n en contradiction avec le fait que le n-ième lancer est P_n. Donc $B_{n-1} \cap P_n \subset B_n \cap P_n$ et l'égalité des évènements par double inclusion.

c) Considérons maintenant l'évènement $B_n \cap F_n$. $\{P_{n-1}, F_{n-1}\}$ étant un système complet d'évènements, on a :

$$B_n \cap F_n = (B_n \cap P_{n-1} \cap F_n) \cup (B_n \cap F_{n-1} \cap F_n).$$

e) De plus, $B_n \cap P_{n-1} \cap F_n = B_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$.

En effet, comme $B_n \subset B_{n-2}$, $B_n \cap P_{n-1} \cap F_n \subset B_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ et réciproquement si les évènements B_{n-2}, P_{n-1}, F_n sont réalisés, on n'a pas obtenu 3 faces de suite *à l'issue* des $n-1$ lancers, ni *à l'issue* des n lancers car on a obtenu pile au $n-1$ ème lancer. Donc $B_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n \subset B_n \cap P_{n-1} \cap F_n$ et l'égalité des évènements par double inclusion.

f) En outre $B_n \cap F_{n-1} \cap F_n = B_{n-3} \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n$.

En effet, d'une part $B_n \cap F_{n-1} \cap F_n \subset B_{n-3} \cap F_{n-1} \cap F_n$ car $B_n \subset B_{n-3}$; et $B_n \cap F_{n-1} \cap F_n \subset P_{n-2}$ car si B_n est réalisé, on ne peut pas obtenir face lors des lancers $n-2$, $n-1$ et n, donc $B_n \cap F_{n-1} \cap F_n \subset B_{n-3} \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n$ et d'autre part, $B_{n-3} \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n \subset B_n \cap F_{n-1} \cap F_n$: si les évènements B_{n-3}, P_{n-2}, F_{n-1}, F_n sont réalisés, on n'a pas obtenu 3 faces de suite *à l'issue* du $n-2$ ème lancer, ni *à l'issue* du $n-1$ ème lancer, ni *à l'issue* du n ème lancer car on a obtenu pile au $n-2$ ème lancer donc B_n est réalisé et donc $B_n \cap F_{n-1} \cap F_n$ est réalisé.

ii) Comme les trois évènements de l'union sont incompatibles, on a déjà :

$$b_n = P(B_n) = P(B_{n-1} \cap P_n) + P(B_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) + P(B_{n-3} \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n)$$

Enfin comme B_{n-1} et P_n sont indépendants car B_{n-1} s'exprime à l'aide des évènements $P_1, F_1, \cdots, P_{n-1}, F_{n-1}$, on a :

$$P(B_{n-1} \cap P_n) = P(B_{n-1})P(P_n) = b_{n-1}p,$$

de même par indépendance,

$$P(B_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n) = P(B_{n-2})P(P_{n-1})P(F_n) = b_{n-2}pq$$

et $P(B_{n-3} \cap P_{n-2} \cap F_{n-1} \cap F_n) = P(B_{n-3})P(P_{n-2})P(F_{n-1})P(F_n) = b_{n-3}pq^2$ d'où l'égalité :

$$b_n = pb_{n-1} + pqb_{n-2} + pq^2 b_{n-3} \ (*)$$

En passant à la limite dans $(*)$, on obtient : $\ell = p\ell + pq\ell + pq^2\ell$ ou encore $\ell(1 - p - pq - pq^2) = 0$.

Or $1 - p - pq - pq^2 = 1 - p(1 + q + q^2) = 1 - p\dfrac{1-q^3}{1-q} = q^3$ car $1 - q = p$, d'où $q^3\ell = 0$ et finalement $\ell = 0$ car $q \neq 0$.

Remarque. Interprétons le résultat $\ell = 0$: par la propriété de "continuité décroissante" de P, on a donc :

$$P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0.$$

En considérant l'évènement contraire $\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B_n}$, on a donc : $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B_n}) = 1$. L'évènement $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \overline{B_n}$ est donc un évènement quasi-certain. Comme l'évènement $\overline{B_n}$ est l'évènement « on a obtenu 3 faces de suite lors des n premiers lancers », on vient donc de montrer qu'il est quasi-certain (ou presque sûr) d'obtenir au moins une fois 3 faces de suite lors de cette succession de lancers.